

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

*кафедра «Основы научных исследований
и проектирования»*

Метрология и измерительные приборы

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

для студентов специальности 1-74 06 02

«Техническое обеспечение процессов
хранения и переработки сельскохозяйственной продукции»

Минск 2007

УДК
ББК

Одобрена научно-методическим советом агрономического факультета учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет» протокол № ___ от «___» _____ 2007 г.

Составители: заведующий кафедрой ОНИП, к.т.н., доцент Ловкис В.Б., ст. преподаватель Носко В.В., ст. преподаватель Абрамчик Л.А.

Рецензенты: старший научный сотрудник РУП «Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по механизации сельского хозяйства», к.т.н. Снежко Э.К.
старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и деталей машин Вольский А.Л.

Отв. за выпуск: Ловкис В.Б.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	4
2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	5
2.1 Выбор темы	5
2.2 Постановка целей и задач при выполнении курсовой работы	5
2.3 Составление плана курсовой работы	6
2.4 Подбор и изучение литературы по теме	6
2.5 Разработка курсовой работы	7
2.5.1 Расчетно-пояснительная записка курсовой работы	7
2.5.2 Содержание и оформление графической части работы	9
2.6 Оформление материалов работы	9
3 ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	12
4 СОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДИКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ	12
4.1 Анализ объекта исследований и составление схемы измерений ...	12
4.2 Анализ способов измерения заданной физической величины	13
4.3 Выбор методики выполнения измерений и оценка погрешности измерений	13
4.4 Выбор и описание конструкции прибора	21
4.5 Составление протокола измерений	23
5 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ	24
5.1 Математическая обработка результатов прямых измерений	25
5.2 Обработка результатов косвенных измерений	45
Приложение А Примерный перечень тем курсовых работ	48
Приложение Б Список рекомендуемой литературы	49
Приложение В Статистические таблицы	52

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Курсовая работа по дисциплине «Метрология и измерительные приборы» имеет целью закрепить знания студентов по практическому применению теории измерений и измерительных приборов при выполнении исследований и испытаний.

При выполнении курсовой работы студент должен решить следующие практические задачи: выбрать физическую величину, подлежащую измерению; сформулировать цель и задачу измерения; провести анализ методов измерения физической величины; разработать методику выполнения измерений; выполнить многократные измерения выбранной (одной и той же) физической величины в соответствии с разработанной методикой; провести математическую обработку результатов и записать полученные значения в стандартной форме.

При разработке методик выполнения измерений особое внимание обратить на анализ погрешности измерений: выявить первичные погрешности, оценить их характер и числовые значения, определить предполагаемую погрешность измерения. В случае невозможности аналитической оценки отдельных составляющих или суммарной погрешности предложить методику экспериментального их определения и получить числовые значения практически.

Разработанную методику выполнения измерений использовать для многократных измерений одной и той же физической величины. Перед математической обработкой результатов измерений исключить систематические составляющие погрешности измерений или обосновать их практическое отсутствие.

Студентам, которые не могут в ходе выполнения задания вести многократные измерения или измерительный эксперимент, следует найти в технической литературе описание измерительного прибора, провести анализ его погрешности и суммарной погрешности, предложить физическую величину, для измерения которой будет использоваться прибор, поставить задачу изме-

рения и разработать методику выполнения измерений. Уровень подробности анализа погрешности прибора должен соответствовать полноте описания прибора и его схеме или конструкции в выбранном источнике. Схема или чертеж прибора и описание его конструкции включаются в состав курсовой работы.

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Выполнение курсовой работы по дисциплине «Метрология и измерительные приборы» состоит из следующих этапов: выбор темы, определение целей и задач по разработке курсовой работы, составление плана работы, подбор и изучение литературы по теме, написание и оформление работы, защита курсовой работы.

2.1 Выбор темы

Курсовая работа может выполняться по любым применяемым средствам измерения для контроля заданной физической величины на различных объектах и предприятиях по хранению и переработке сельскохозяйственной продукции.

Выбор темы производится по инициативе студента или руководителя проекта исходя из специализации, с учетом возможности ознакомления с состоянием интересующего вопроса при прохождении практики.

При выборе темы следует стремиться к тому, чтобы в будущем её можно было продолжить и углубить при выполнении дипломного проектирования.

2.2 Определение целей и задач при выполнении работы

После выбора темы необходимо определить и согласовать с руководителем цели и задачи работы, которые окончательно оформляются в задании.

Цель работы определяется её содержанием и в определенной мере находит свое отражение в названии темы.

Задачи работы вытекают из необходимости изучения и проведения исследований по тем вопросам, решение которых позволяет достигнуть поставленной цели.

2.3 Составление плана курсовой работы

Конкретный план курсовой работы оформляется в виде задания и зависит от наименования темы, цели и задач работы. Развернутый план составляется студентом самостоятельно и согласуется с руководителем.

Примерный план курсовой работы предлагается в задании.

В плане работы намечается её структура, название разделов, последовательность выполнения.

В законченной и оформленной курсовой работе план, по существу, является содержанием.

2.4 Подбор и изучение литературы по теме

Определив круг вопросов, подлежащих изучению, студент приступает к поиску информации по этим вопросам.

Рекомендуемый список научно-технических изданий по средствам измерений и обработке результатов приводится в приложении Б. Изучение литературы рекомендуется начинать с работ, опубликованных в последнее время, а затем переходить к более ранним изданиям, что позволяет выявить и изучить новейшие достижения науки по данной теме. При подборе материалов студент должен использовать фонды библиотеки БГАТУ, отраслевых институтов, РНТБ, Национальной библиотеки Беларуси и др.

2.5 Разработка курсовой работы

Курсовая работа выполняется в соответствии с заданием, а оформляется исходя из требований СТП БГАТУ 01.02-96 «Указания по оформлению курсовых и дипломных проектов».

Курсовая работа должна состоять:

- из расчетно-пояснительной записки (ПЗ) объемом 40–50 страниц рукописного текста или 30–40 страниц машинописного текста. (При определении объема ПЗ приложения не учитываются);
- графической части из 5–6 листов формата А4.

2.5.1 Расчетно-пояснительная записка курсовой работы

В состав расчетно-пояснительной записки курсовой работы включаются:

- титульный лист (является первой страницей пояснительной записки, выполняется чертежным шрифтом или машинописным способом, без рамки и штампа, номер страницы на титульном листе не проставляется, но включается в общую нумерацию);
- задание на курсовую работу (оформляется на бланках установленной формы аккуратно, рукописным или машинописным способом);
- реферат (оформляется согласно ГОСТ 7.32-2001, содержит данные об объеме курсовой работы, перечень ключевых слов, текст реферата. Перечень ключевых слов должен включать от 5 до 15 слов или словосочетаний. В тексте реферата в краткой форме должны быть отражены объект разработки, цель работы, методы разработки, полученные результаты, основные конструкторские характеристики, степень внедрения. Текст оформляется с рамкой без основной подписи, номер страницы не проставляется. Объем реферата не должен превышать одной страницы);
- содержание (включает весь перечень заголовков разделов и подразделов записки, начиная с введения и заканчивая приложениями. Указывается номер страницы, на которой начинаются разделы и подразделы. Название раздела

пишется прописными буквами, название подраздела записывается строчными буквами с первой прописной. Первый лист содержания является заглавным листом пояснительной записки и должен иметь на поле рамки основную надпись по форме 2 (ГОСТ 2.104–98). Последующие листы содержания и текст ПЗ должны иметь сквозную нумерацию и оформляются основной надписью по форме 2а (ГОСТ 2.104–98);

- введение (оценивает современное состояние рассматриваемого процесса измерения в перерабатывающей отрасли и его значение для народного хозяйства, актуальность поставленной инженерной задачи. Объем введения — не более двух страниц);

- составление методики выполнения измерений и математическая обработка результатов измерений выполняется в соответствии с требованиями разделов 4 и 5 настоящих методических указаний;

- заключение (содержит краткое обобщение всех представленных в проекте материалов. В нем подчеркиваются основные вопросы, которыми занимался проектант, даются рекомендации по использованию полученных результатов);

- список используемых источников (включает в себя все учебники и учебные пособия, журналы и другие периодические издания, использованные студентом при работе; нумеруются арабскими цифрами. Основным источником для библиографического описания учебника является оборотная сторона его титульного листа. Списки использованных источников располагаются в порядке появления на них ссылок в тексте);

- приложения (статистические таблицы, схемы измерений физической величины, монтажные и другие чертежи и схемы, выполненные в соответствии с ЕСКД).

В текст расчетно-пояснительной записки добавляются схемы, рисунки, графики и т.д., поясняющие основное содержание работы.

2.5.2 Содержание и оформление графической части работы

Графическая часть курсовой работы включает 5–6 листов чертежей формата А4, определяемых руководителем.

В графической части курсовой работы представляется: план объекта исследований со схемой измерений, схема прибора, точечная диаграмма результатов наблюдений, гистограмма наблюдений фактическая, гистограмма наблюдений исправленная. Независимо от формата листа каждый чертеж оформляется рамкой — сплошной основной линией, проведенной на расстоянии 20 мм слева и по 5 мм с остальных сторон границ формата.

Основные надписи располагаются в правом нижнем углу каждого чертежа. На листах формата А4 основную надпись располагают вдоль короткой стороны листа.

2.6 Оформление материалов работы

Пояснительная записка курсового проекта должна быть написана разборчивым почерком черными или фиолетовыми чернилами (или напечатана) на одной стороне стандартного листа белой нелинованной бумаги формата А4 (210×297), грамотно и аккуратно, без помарок. Допускаются мелкие аккуратные исправления. Представляется в сброшюрованном виде.

Каждый лист оформляется рамкой с отступом от краев бумаги на 5 мм, а слева — на 20 мм. Расстояние от рамки до границ текста рекомендуется оставлять: в начале строк — не менее 5 мм; в конце строк — не менее 3 мм; от верхней и нижней строки до границ рамки — не менее 10 мм. Число строк на листе 28–30.

Содержание записки разделяют на разделы и подразделы. Нумерацию разделов производят арабскими цифрами без точки в пределах всей записки (например: 1; 2; 3...9 и т.д.). Подразделы нумеруются порядковыми номерами

раздела и подраздела, разделенными точкой (например: 1.2 — второй подраздел первого раздела; 5.4 — четвертый подраздел пятого раздела).

Наименования разделов должны быть краткими и записываться в виде заголовков по центру (отдельная строка) прописными (заглавными) буквами высотой 5–7 мм.

Наименования подразделов пишутся в виде заголовков строчными буквами (кроме первой прописной) по центру.

Переносы слов в заголовках не допускаются. Точку в конце заголовка не ставят. Расстояние между заголовками и последующим текстом при оформлении записки должно быть не менее 10 мм.

Каждый раздел желательно начинать с нового листа.

Формулы, помещенные в тексте, нумеруются арабскими цифрами в пределах раздела. Номер формулы состоит из номера раздела и порядкового номера формулы, разделенных точкой.

Все входящие в формулу величины обязательно должны быть пояснены и иметь размерность в Международной системе единиц измерений (СИ). Значение каждой величины приводят непосредственно под формулой, с новой строки в той последовательности, в которой они приведены в формуле. Первая строка расшифровки значений начинается со слова «где» без двоеточия после него.

Например:

$$N = \frac{PQ}{3600 \times 1020}, \quad (2.1)$$

где P — давление, Па;

Q — производительность вентилятора, м³/с;

3600, 1020 — численные значения коэффициентов перевода.

Расчет параметров приводят сразу после расшифровки значений формулы, начиная с новой строки.

Ссылки в тексте на порядковый номер формулы приводят в скобках, например: в формуле (5.1).

При использовании формул из других источников и опытных значений различных коэффициентов и других величин необходимо выделять двумя квадратными скобками. Номер источника по списку использованной литературы, откуда эти данные взяты. Например: [4].

Если в записке более одной иллюстрации, то их нумеруют арабскими цифрами в пределах разделов записки, например: Рисунок 1.2 — второй рисунок первого раздела; Рисунок 5.4 — четвертый рисунок пятого раздела. Ссылки на рисунки пишутся в скобках, например (рисунок 5.4). Ссылки на ранее упомянутые рисунки пишут с сокращенным словом «смотри»: см. рисунок 1.2. Все рисунки и графики должны иметь подрисуночные подписи. Обозначение рисунка располагается под ним в левом углу и сопровождается заголовком. Все таблицы, если их более одной, нумеруют арабскими цифрами в пределах разделов, например: таблица 3.1 — первая таблица третьего раздела. Каждая таблица должна иметь наименование. Номер таблицы записывается в левом верхнем углу с абзацного отступа, затем через тире пишется наименование.

Например:

Таблица 3.1 — Характеристика основного технологического оборудования для обеспечения микроклимата помещения

Оборудование	Марка	Производительность или вместимость, л/ч, л	Габариты, мм	Масса, кг	Установленная мощность, кВт	Потребное количество, шт.
Вентилятор	ВО	2500	400×400×50	3,6	0,116	1
Электрокалорифер	ЭК	6000	1200×1200×1000	240	8,6	1
Установка очистки воздуха	БСУ	1000	300×300×1110	14	0,056	2

В тексте расчетно-пояснительной записки на все таблицы обязательно должны быть ссылки, при этом слово «таблица» пишется с указанием её номера. При переносе части таблицы на другой лист повторяют головку

таблицы. В левом верхнем углу пишут: «Продолжение таблицы 1.2» или «Окончание таблицы 1.2».

Диагональное деление головки таблицы не допускается.

Графы «№ п/п» и «Единицы измерения» в таблицу не включают.

3 ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Выполненную курсовую работу студент сдает руководителю на проверку. Работа признанная удовлетворительной допускается к защите. В противном случае она возвращается на доработку.

По допущенной к защите работе студент знакомится с замечаниями руководителя и готовится к ее защите.

Защита проводится в установленные учебным планом сроки, преимущественно комиссией из сотрудников кафедры в составе не менее 2-х человек.

При защите студент излагает сущность курсовой работы в виде краткого доклада и отвечает на вопросы. Общая оценка по курсовой работе выставляется по совокупности критериев: оформление и глубина проработки разделов записки и графического материала; доклад; ответы на вопросы.

По результатам выполнения курсовой работы преподаватель совместно со студентом делает вывод о возможности использования материалов курсовой работы для дальнейшей научно-исследовательской работы студента (НИРС).

4 СОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДИКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1 Анализ объекта исследований и составление схемы измерений

В соответствии с темой разрабатывают упрощенную модель объекта измерений (включая конфигурацию важнейших элементов, их размеры, требования к точности, габаритные размеры и конструктивные особенности де-

тали и другие необходимые сведения). Уровни точности выбирают самостоятельно, причем рекомендуется назначать требования среднего уровня.

При составлении схемы измерительной установки необходимо учитывать следующее:

- все приборы должны устанавливаться в правильное и устойчивое положение;
- соединительные провода должны иметь надежные контакты и хорошую изоляцию;
- приборы следует располагать так, чтобы удобно было производить отсчеты и манипулировать их органами настройки и управления;
- шкалы должны хорошо освещаться, должны быть приняты меры к устранению параллакса;
- при работе с высоковольтными установками необходимо установить ограждение;
- проводники должны быть как можно короче;
- располагать приборы следует так, чтобы исключить или свести к минимуму их влияние друг на друга.

4.2 Анализ способов измерения заданной физической величины

Провести анализ возможных способов измерения и применяемых измерительных устройств для определения значения заданной электрической или неэлектрической величины.

4.3 Выбор методики выполнения измерений и оценка погрешности измерений

Пусть задан массив показаний прибора при измерении физической величины (ФВ). Данные моделируют результаты многократных измерений одной и той же ФВ.

Необходимо:

- построить точечную диаграмму результатов измерений в порядке их получения (результаты приведены именно в таком порядке). Рассчитать неисправленные значения $X_{\text{ср}}$, $\tilde{\sigma}_x$, V_i . Определить наличие и характер (тенденцию) изменения результатов; результаты с явно выраженными грубыми погрешностями подлежат цензурованию, после чего числовые характеристики пересчитывают;
- выполнить статистическую обработку исправленных результатов измерений (рассчитать $X_{\text{ср}}$, $\tilde{\sigma}_x$, V_i). При наличии сомнительных экспериментальных результатов необходимо произвести статистическое отбраковывание результатов с грубыми погрешностями. Если грубые погрешности были обнаружены, после исключения дефектных результатов следует пересчитать числовые характеристики. Представить результат измерения в установленной форме;
- описать методику выполнения измерений (МВИ). В описание МВИ должны войти схемы измерений ФВ, применяемые средства измерений и вспомогательные устройства, метрологические характеристики СИ, условия измерений (при необходимости). При описании МВИ следует рассмотреть случай многократных измерений одной ФВ (измерения заданного параметра объекта в одном сечении), а также случай измерений множества номинально одинаковых ФВ;
- описать возможные причины появления систематических и случайных составляющих погрешностей измерений, источники погрешностей и предполагаемые тенденции изменения погрешностей. При анализе систематических составляющих погрешности руководствоваться тенденцией изменения результатов измерений.

Ввиду того что задание носит условный (чисто учебный) характер, методика выполнения измерений «подгоняется» под заданный массив результатов измерений. Реальная задача состоит в выборе МВИ и реализации измерительной процедуры для получения результатов измерительного эксперимента.

Подбор применяемого средства измерений (СИ): цена деления СИ должна соответствовать порядку последней или предпоследней изменяющейся цифры массива результатов измерений. Например, при массиве данных вида: 22,562; 22,559; 22,564; 22,560; 22,556; ... — прибор может иметь цену деления 0,01 и менее. Основная погрешность СИ должна быть примерно на порядок меньше размаха R исправленных результатов измерений и составлять не более 60 % случайной составляющей погрешности измерений, определяемой с доверительной вероятностью $P = 0,95$.

Измерения — нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. При любых измерениях обязательным условием является получение действительного значения физической величины, т.е. значения, настолько приближающегося к истинному, что для данной цели измерения полученное значение может быть использовано вместо истинного значения измеряемой физической величины. Исходя из этого можно сформулировать две частные задачи, которые обязательно решают при каждом измерении: выбор допускаемой погрешности измерения и определение реальной погрешности измерения, которая должна быть меньше допускаемой.

Значение допускаемой погрешности $[\Delta]$ выбирают в зависимости от цели измерения. Можно выделить следующие цели измерений: измерительный приемочный контроль (по результатам измерений принимают решения о годности контролируемой физической величины); арбитражная перепроверка результатов приемочного контроля; измерения при экспериментальном исследовании физической величины при фиксированных условиях (получение одной точки исследуемой зависимости); измерение с максимальной точностью. В каждом из перечисленных случаев подход к назначению допускаемой погрешности измерений будет отличным.

Измерения при исследовании отличаются той особенностью, что физическая величина не ограничена предельными значениями, а даже в некоторых фиксированных условиях будет характеризоваться размахом R , значение

которого до эксперимента неизвестно. В подобных случаях выбор допустимой погрешности измерений осуществляется в процессе исследований методом проб и ошибок. Можно рекомендовать такую последовательность решения: выбрать методику выполнения измерений (МВИ), обеспечивающую по возможности меньшую погрешность и, полагая предварительно ее значение допустимым, провести измерения исследуемой физической величины. Если в результате получим

$$\Delta = [\Delta] < R, \quad (4.1)$$

т.е. колебание измеряемой величины в пределах погрешности измерения, и этот результат является достаточным для оценки экспериментальных данных, задача решена. Если же этот результат признан неудовлетворительным, то необходимо принять меры для уменьшения погрешности измерения вплоть до обеспечения соотношения:

$$\Delta = [\Delta] \leq (1/10 \dots 1/6)R, \quad (4.2)$$

что позволяет проводить статистическую обработку результатов измерений, т.е. оценить вид закона распределения измеряемой случайной величины и его числовые характеристики.

При измерении с максимальной точностью решение представляется очевидным: допускаемая погрешность принимается равной минимально достижимой реальной погрешности измерения.

Определение реальной погрешности измерения может выполняться аналитически до выполнения измерений либо экспериментально на основании параллельного использования более точных средств измерения. Погрешность измерения включает множество составляющих, которые можно разбить на группы по причинам возникновения, оценить характер проявления и числовое значение для последующего суммирования по определенным закономерностям.

Для упорядочения можно использовать классификацию погрешностей по источникам их возникновения, разбивая первичные погрешности на четыре группы:

- инструментальные погрешности (погрешности прибора, установочной меры, вспомогательных средств измерения и т.п.);
- погрешности метода измерения (погрешности из-за принятых при измерении или обработке результатов допущений, а также погрешности из-за реализации метода при измерении «не идеальной» физической величины);
- субъективные, или личностные погрешности (погрешности отсчитывания и «операционные» погрешности при манипулировании средством измерения);
- погрешности условий (возникающие из-за отличия условий измерения от нормальных).

В каждую из перечисленных групп может входить множество составляющих «первичных» погрешностей, например, субъективные погрешности могут включать погрешность интерполирования при отсчитывании долей деления по шкале прибора, или погрешность округления и погрешность параллакса при отсчитывании по прибору, у которого плоскости шкалы и указателя не совпадают, погрешности управления прибором при измерении, такие как погрешности при арретировании, при использовании ручных устройств интерполирования и др.

Любая из составляющих погрешностей может быть отнесена по характеру ее проявления к систематическим, если она остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины, или к случайным погрешностям, если при повторных измерениях погрешность изменяется как случайная величина, т.е., будучи непредсказуемой по величине и по знаку в каждом конкретном проявлении, в массе обладает статистической устойчивостью и может быть оценена с использованием теории вероятностей. Например, погрешность округления при отсчитывании по прибору с показывающим устройством шкала-указатель носит случайный характер, так как зависит от непредсказуемого положения указателя относи-

тельно штрихов (отметок) шкалы. Оценка предельного значения этой погрешности будет зависеть от цены деления прибора и от принятого принципа округления: до целого деления погрешность не превысит половины цены деления, а при округлении до половины деления — четвертой части цены деления прибора.

При аналитической оценке погрешности измерения поступают следующим образом: выявляют первичные составляющие погрешности измерения, анализируя применяемые средства измерения и метод, предполагаемые условия измерения, которые можно нормировать для обеспечения приемлемой погрешности измерения.

Для оценки качества числовых значений, составляющих погрешности измерения, привлекают литературные источники, данные справочников, стандартов и паспортные характеристики средств измерений.

Суммирование составляющих погрешности измерения можно осуществлять по методу максимума-минимума, алгебраически складывая предельные значения составляющих в самом неблагоприятном сочетании (алгебраическое суммирование характерно для систематических составляющих погрешности измерения):

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \Delta_{ci} \quad (4.3)$$

Случайные составляющие погрешности измерения принято суммировать квадратически:

$$\Delta^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2} \quad (4.4)$$

Полученные значения систематической и случайной составляющих погрешности суммируются алгебраически, что дает оценку погрешности измерения. Если полученное предельное значение погрешности измерения меньше или равно допустимой погрешности, предложенная методика вы-

полнения измерений может быть принята для получения действительного значения измеряемой физической величины.

Если погрешность измерения или некоторые ее составляющие не могут быть определены аналитически, остается возможность их экспериментальной оценки, для чего используются измерительные эксперименты. Так, например, случайная составляющая погрешности измерения может быть оценена по результатам многократных измерений одной и той же физической величины в фиксированных условиях. Полученный массив результатов измерений дает возможность рассчитывать среднее арифметическое значение и оценку среднего квадратического результата измерений, для чего используются зависимости:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}. \quad (4.6)$$

Случайная погрешность измерения в первом приближении может рассчитываться по формуле:

$$\Delta = t \tilde{\sigma}_x, \quad (4.7)$$

где t – коэффициент Стьюдента принимается в зависимости от принятой доверительной вероятности равным 2 при $P = 0,95$ или 3 при $P = 0,99$, в предположении бесконечного ($N > 30$) числа измерений и нормального закона распределения случайной составляющей погрешности измерений.

Систематическая составляющая погрешности измерений может оцениваться по результатам измерения аналогичной физической величины, аттестованной с высокой точностью, так чтобы ее собственной погрешностью можно было пренебречь, или на основании сравнения результатов измерения исследуемым методом и методом измерения с заведомо пренебрежимо малой

погрешностью одной и той же физической величины. Переменные систематические погрешности можно попытаться оценить по точечной диаграмме в координатах; значение величины — номер измерения. Анализ полученного графика позволит выявить характер систематической погрешности при многократном измерении одной и той же физической величины: прямая, параллельная оси абсцисс, говорит о наличии постоянной систематической погрешности; наклонная прямая свидетельствует о монотонно изменяющейся погрешности («прогрессивная» систематическая составляющая); наличие периодической составляющей подтверждается графиком гармонического характера. График может также показать сложный характер систематической погрешности из-за наличия прогрессивной и одной или нескольких периодических составляющих. График можно использовать как для выявления тенденции, так и для приближенной оценки значений переменных систематических составляющих.

Формализованная последовательность решения задачи подготовки измерения представлена в виде алгоритмической инструкции на рисунке 1. Работа начинается с определения цели и задачи измерения, например, измерение с целью исследования температуры в картофелехранилище $3 \pm 0,5$ °С. Следующий шаг — установление допустимой погрешности измерения. Для поставленной задачи измерения можно принять $[\Delta] = 0,1$ °С. Далее необходимо предложить методику выполнения измерений, которая должна включать применяемые средства измерения, порядок их использования, схему взаимодействия с измеряемой величиной, т.е. все данные, необходимые оператору при выполнении измерения и метрологу при оценке погрешности измерения. Для решения измерительной задачи может быть предложена одна или несколько методик выполнения измерений. Следующий шаг предусматривает анализ погрешностей измерения, т.е. поиск составляющих погрешности, их оценку и суммирование для определения погрешности измерения. Если аналитическое решение затруднительно или невозможно, прибегают к экспериментальному определению погрешности измерения. Очередной шаг

— сравнение выявленной погрешности измерения одной или нескольких методик выполнения измерений с допустимой погрешностью измерения. В случае, когда погрешность измерения меньше или равна допустимой, методика выполнения измерений признается удовлетворительной по точности и может использоваться для решения данной измерительной задачи.

Конкурирующие методики подвергаются сравнительному анализу и выбирается наиболее подходящая из них, исходя из соображений производительности, доступности средств измерений, необходимой квалификации оператора и других «неметрологических» соображений. Выбором методики выполнения измерений заканчивается процесс решения задачи подготовки измерений.

4.4 Выбор и описание конструкции прибора

Измерительные приборы выбираются на основании их технических характеристик в соответствии с измеряемой величиной, заданной точностью и диапазоном частот. Приборы должны оказывать малое влияние на работу исследуемых устройств. Наиболее часто значительные ошибки возникают из-за неправильного подбора приборов. Приборы должны быть исправны, поверены. Запрещается применение для измерений приборов с истекшим сроком поверки.

В КП необходимо привести схему и полное описание устройства и принципа действия выбранного прибора.

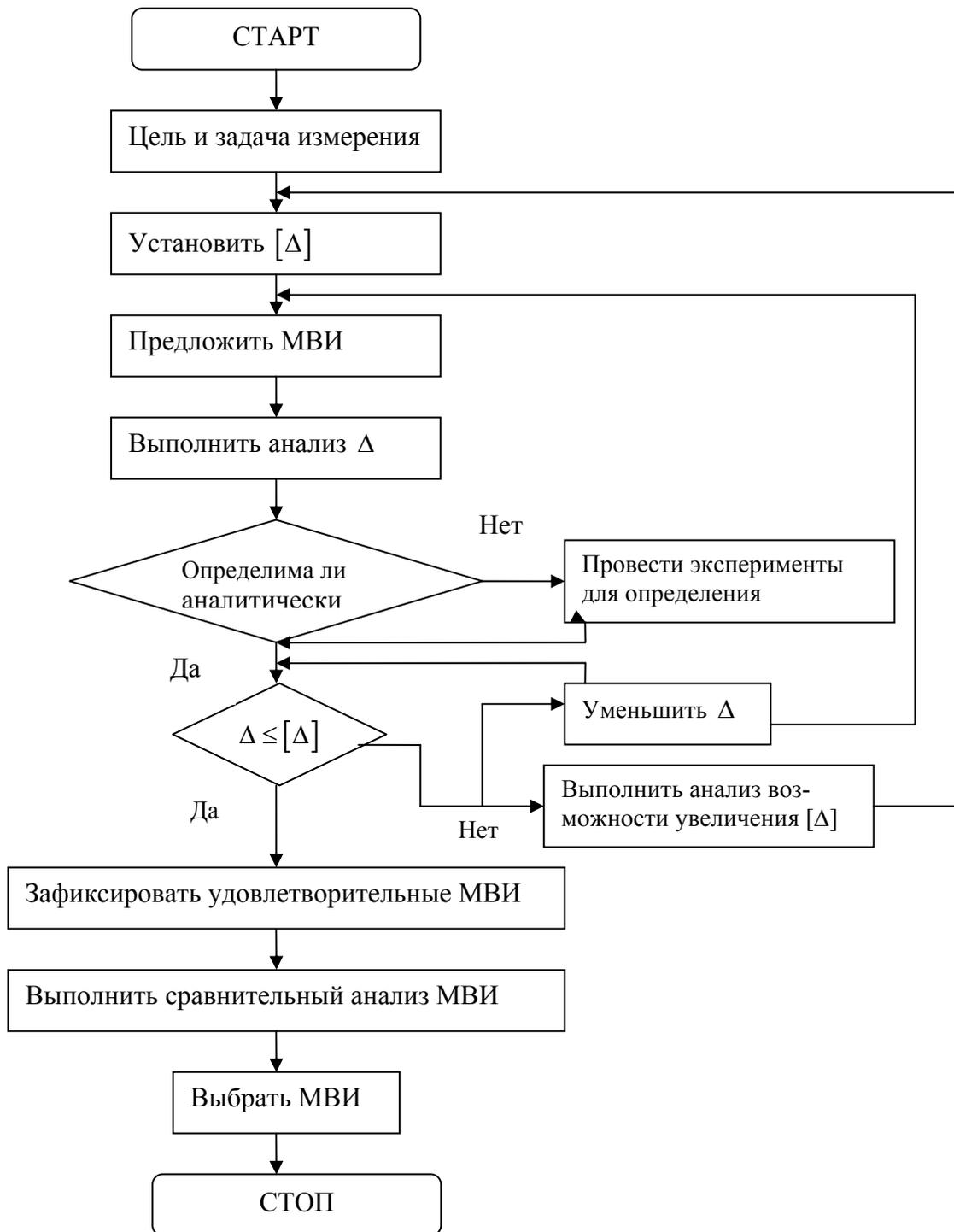


Рисунок 1 — Алгоритмическая инструкция подготовки измерения

4.5 Составление протокола измерений

Достоверность измерений во многом зависит от качества ведения протокола. В протоколе должно быть отмечено следующее:

- род измерений и применяемый метод;
- время измерений;
- наименование и номера приборов;
- результаты эксперимента.

Протоколы следует записывать в виде соответствующих таблиц и в такой форме, в какой они получены в процессе измерений. В протоколах должны быть отмечены все обстоятельства, которые могут оказать влияние на точность измерений.

Окончательные вычисления не следует накапливать или откладывать на долгий срок. Полезно часть их производить в процессе измерений. Бессистемные вычисления и измерения часто приводят к ошибкам результата, что затрудняет определение характера изменения изучаемого процесса, определение точности проведенных измерений и т.д.

В конечном счете, качество измерений зависит от опыта экспериментатора, однако правила могут предохранить от грубых ошибок.

5 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Многократные измерения проводятся для определения с заданной вероятностью погрешности измерений. В основу вероятностной оценки погрешности измерения положено допущение случайного характера этой погрешности, что правомерно в случае исключения систематической составляющей погрешности измерения, которая обязательно присутствует в любом результате измерения. Поскольку полное исключение систематической составляющей погрешности измерения невозможно, удовлетворительной следует считать такую ситуацию, когда остаточная (неисключенная) систематическая составляющая пренебрежимо мала по сравнению со случайной составляющей погрешности измерения.

Математическая обработка результатов многократных измерений выполняется на базе теории вероятностей и математической статистики, причем обработке подлежат только исправленные результаты измерений, т.е. результаты, полученные после исключения систематических погрешностей измерения. В результате обработки, как правило, получают результат измерения в стандартной форме:

$$A \pm \Delta, P, \quad (5.1)$$

где A — результат измерения в единицах измеряемой величины (за результат измерения принимают среднее арифметическое значение исправленных результатов многократных измерений);

Δ — граница погрешности измерения в тех же единицах (за границу погрешности измерения принимают значение $\Delta = \Delta = t \sigma_x$);

P — установленная вероятность, с которой погрешность измерения находится, в указанных границах.

5.1 Математическая обработка результатов прямых измерений

Порядок математической обработки прямых измерений можно представить следующим образом (рисунок 2).

1. Рассчитать среднее арифметическое значение, принимаемое за результат измерения:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \quad (5.1)$$

2. Вычислить отклонения от среднего:

$$V_i = X_i - \bar{X}. \quad (5.2)$$

3. Проверить равенство нулю суммы отклонений (несоблюдение равенства свидетельствует об ошибке в вычислении V_i или \bar{X}):

$$\sum_{i=1}^N V_i = 0; \quad (5.3)$$

4. Вычислить оценку среднего квадратического отклонения результатов измерений:

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N V_i^2}. \quad (5.4)$$

5. Проверить согласие опытного распределения случайной величины с теоретическим (проверка выполняется в соответствии с ГОСТ 11.006–74). В случае обоснованного предположения о нормальном распределении значений измеряемой величины, проверка гипотезы проводится с уровнем значимости от 10 % до 2 % по ГОСТ 8.207–76. Необходимо иметь в виду, что критериями Колмогорова и Пирсона по ГОСТ 11.006–74 можно пользоваться для объема выборки $N \geq 50$, а для выборки объема 3–50 наблюдений применяется специальный критерий W . Критериями Колмогорова и ω^2 можно пользоваться только для распределений непрерывных случайных величин.

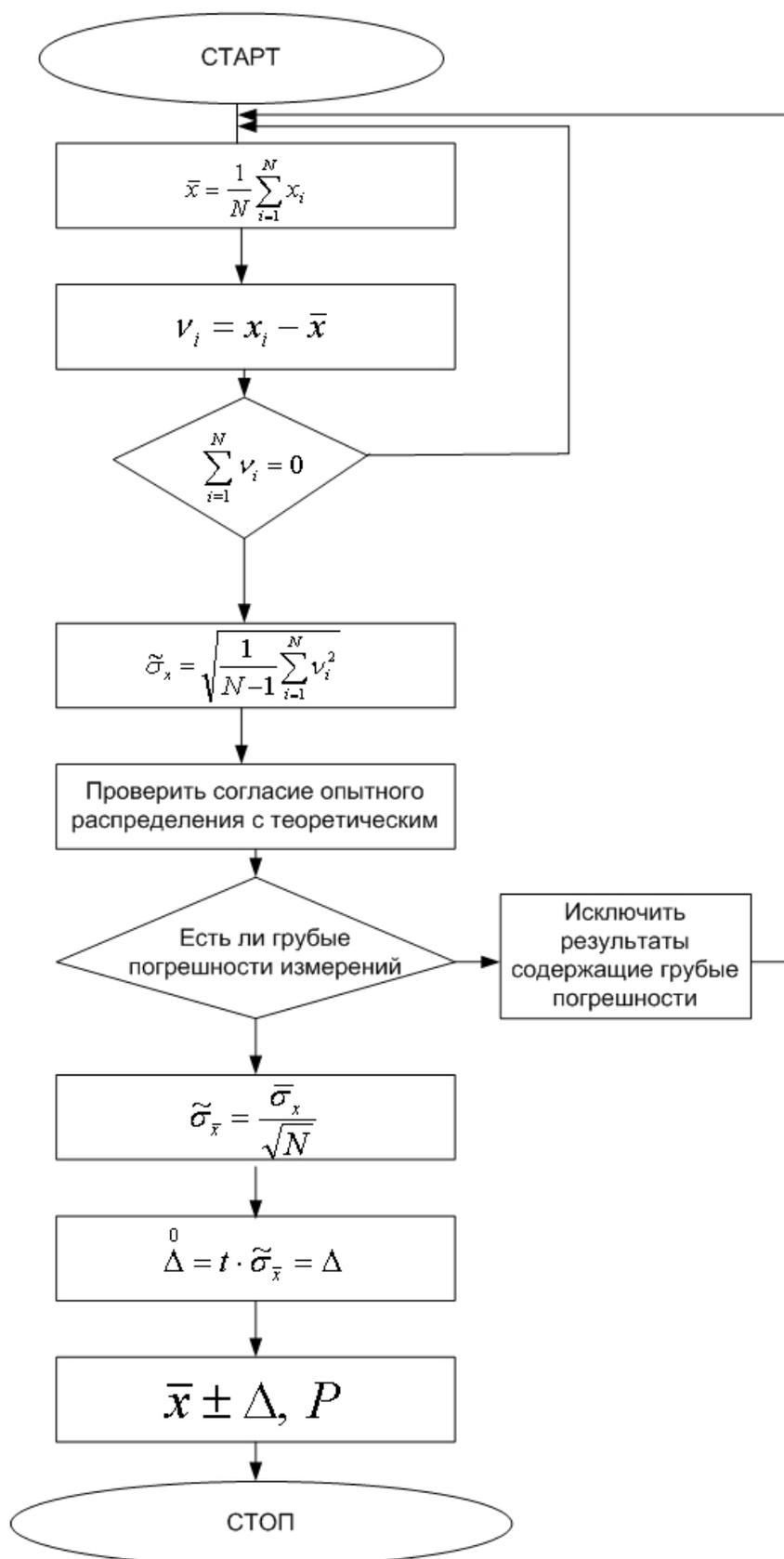


Рисунок 2 — Алгоритм математической обработки результатов прямых измерений

Остановимся на критерии χ^2 . Идея этого метода состоит в контроле отклонений гистограммы экспериментальных данных от гистограммы с та-

ким же числом интервалов, построенной на основе нормального распределения. Сумма квадратов разностей частот по интервалам не должна превышать значений χ^2 , для которых составлены таблицы в зависимости от уровня значимости критерия q и числа степеней свободы $k = L - 1$, где L — число интервалов.

6. Группируют наблюдения по интервалам. При числе наблюдений 40–100 обычно принимают 5–9 интервалов. Для каждого интервала вычисляют середину x_{i0} и подсчитывают число наблюдений $\tilde{\varphi}_i$, попавшее в каждый интервал.

7. Вычисляют число наблюдений для каждого из интервалов, теоретически соответствующее нормальному распределению. Для этого сначала от реальных середин интервалов x_{i0} переходят к нормированным z_i :

$$z_i = \frac{x_{i0} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}}. \quad (5.5)$$

Затем для каждого значения z_i находят значение функции плотности вероятностей:

$$f(z_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{z_i^2}{2}}. \quad (5.6)$$

Вычисление $f(z_i)$ ведется с помощью таблицы В-1 приложения. Теперь можно вычислить ту часть φ_i общего числа имеющихся наблюдений, которая теоретически должна была быть в каждом из интервалов:

$$\varphi_i = n \frac{h}{\tilde{\sigma}} f(z_i),$$

где n — общее число наблюдений;

$h = x_{i0+1} - x_{i0}$ — длина интервала, принятая при построении гистограмм.

8. Если в какой-либо интервал теоретически попадает меньше 5 наблюдений, то его в обеих гистограммах соединяют с соседним интервалом. Затем определяют число степеней свободы $k = L - 1$, где L — общее число

интервалов (если произведено укрупнение интервалов, то L — число интервалов после укрупнения).

9. Вычисляют показатель разности частот:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^i \chi_i^2, \quad (5.8)$$

где $\chi_i^2 = \frac{(\tilde{\varphi} - \varphi_i)^2}{\varphi_i}$.

10. Выбирают уровень значимости критерия χ^2 (обозначим q). Уровень значимости должен быть достаточно малым, чтобы была мала вероятность отклонить правильную гипотезу (совершить ошибку первого рода). С другой стороны, слишком малое значение q увеличивает вероятность принять ложную гипотезу, т.е. совершить ошибку второго рода.

По уровню значимости q и числу степеней свободы k в таблице В-3 находим границу критической области χ^2 , так что

$$p\{\chi^2 > \chi_q^2\} = q. \quad (5.9)$$

Вероятность того, что получаемое значение χ^2 превышает χ_q^2 , равна q . Поэтому, если оказывается, что $\chi^2 > \chi_q^2$, то гипотеза о нормальности отвергается. Если $\chi^2 < \chi_q^2$ гипотеза о нормальности принимается.

Чем меньше q , тем (при том же k) больше значение χ_q^2 . Тем легче выполняется условие $\chi^2 < \chi_q^2$, и принимается проверяемая гипотеза. Но при этом увеличивается вероятность ошибки второго рода. Поэтому нецелесообразно брать $q < 0,01$. При слишком большом q , как указывалось выше, возрастает вероятность ошибки первого рода и, кроме того, снижается чувствительность критерия. Например, при $q = 0,5$ с равной вероятностью χ^2 может быть и больше и меньше χ_q^2 и, следовательно, теряется возможность сделать выбор в пользу проверяемой гипотезы или против нее.

Для единообразия решения рассматриваемой задачи желательно унифицировать применяемые уровни значимости. С этой целью можно предло-

жить попытаться ограничить выбор уровня значимости интервалом $0,02 \leq q \leq 0,1$.

Наряду с рассмотренной проверкой, при которой была принята односторонняя критическая область, применяют и двусторонние критические области, т.е. оценивается $P\{\chi^2_{\text{н}} < \chi^2 < \chi^2_{\text{в}}\} = q$. В этом есть определенный смысл, так как у реальной группы данных очень малое значение χ^2 маловероятно. Уровень значимости критерия q делится на две части: $q = q_1 + q_2$. Для простоты часто считают $q_1 = q_2$. По таблице В-3 для $P\{\chi^2 > \chi^2_{q}\}$ находят χ^2_i для уровня значимости q_1 и числа степеней свободы k и χ^2_i для уровня значимости $1 - q_2$ и того же k . Гипотеза о нормальности проверяемой группы данных принимается, если

$$\chi^2_2 \leq \chi^2 \leq \chi^2_1.$$

Следует еще раз отметить, что данный критерий позволяет проверять соответствие эмпирических данных любому теоретическому распределению, а не только нормальному. Однако этот критерий, как, впрочем, и другие критерии согласия, не позволяет установить вид распределения наблюдений, а лишь дает возможность проверить, допустимо ли отнести их к нормальному или иному выбранному заранее распределению.

В практике измерений часто возникает необходимость проверить гипотезу о нормальности небольшой группы наблюдений. Гипотеза проверяется с помощью двух критериев.

11. Критерий 1. По данным наблюдений $x_1 \dots x_n$ вычисляем значение параметра d по формуле:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{nS_*}, \quad (5.11)$$

где

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (5.12)$$

Выбираем затем уровень значимости критерия q_1 и по таблице В-4 находим $d_{\frac{q}{2}}$ и $d_{1-\frac{q}{2}}$.

Принимаем, что гипотеза о нормальности по критерию 1 не отвергается, если

$$d_{1-\frac{q}{2}} \leq d \leq d_{\frac{q}{2}}. \quad (5.13)$$

В противном случае гипотеза отвергается.

12. Критерий 2. Этот критерий введен дополнительно для проверки «концов» распределений.

Принимаем, что гипотеза о нормальности по критерию 2 не отвергается, если не более m разностей $|x_i - \bar{x}|$ превзошли $Z_{\frac{\alpha}{2}} \tilde{\sigma}$, где $\tilde{\sigma}$ вычисляется по формуле (4.6), а $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ верхняя $100\frac{\alpha}{2}$ -процентная квантиль нормированной функции Лапласа (таблица П-2); α определяем по n и уровню значимости q как корень уравнения:

$$1 - \sum_{k=0}^m c_n^k (1 - \alpha)^k a^{n-k} = q. \quad (5.14)$$

Для нахождения α по заданным n , q и $m = 1$ или 2 составлена таблица В-5.

При $10 < n < 20$ следует принимать $m = 1$. Если $50 > n \geq 20$, то $m = 2$.

Если число разностей $|x_i - \bar{x}|$, больших $Z_{\frac{\alpha}{2}} \tilde{\sigma}$, превышает m , то гипотеза

за о нормальности отвергается.

Гипотеза о нормальности принимается, если для проверяемой группы данных выполняются оба критерия.

Уровень значимости составного критерия:

$$q \leq q_1 + q_2, \quad (5.15)$$

где q_1 — уровень значимости для критерия 1;

q_2 — уровень значимости для критерия 2.

13. Обнаружение грубых погрешностей.

Если в полученной группе результатов наблюдений одно-два резко отличаются от остальных, а наличие описки, ошибки в снятии показаний и тому подобных промахов не установлено, следует проверить, не являются ли они грубыми погрешностями, подлежащими исключению. Задача решается статистическими методами, основанными на том, что распределение, к которому относится рассматриваемая группа наблюдений, можно считать нормальным.

Для этого случая Ф.Е. Граббс рассчитал границы допустимых максимальных и минимальных значений при n наблюдениях.

В дальнейшем были табулированы q -процентные точки распределения максимальных по модулю отклонений результатов наблюдений от их среднего значения:

$$t_r = \frac{\max |x_i - \bar{x}|}{\tilde{\sigma}}, \quad (5.16)$$

где $\tilde{\sigma}$ — оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле (5.4). Это распределение удобнее для расчетов и приведено в таблице В-6.

Чтобы проверить возможность отбросить наблюдение x_b , нужно сначала вычислить:

$$t = \frac{|x_{\hat{a}} - \bar{x}|}{\tilde{\sigma}}, \quad (5.17)$$

где \bar{x} и $\tilde{\sigma}$ вычисляют с учетом всех результатов наблюдений.

Затем, выбрав уровень значимости q , нужно найти в таблице В-6 значение t_r , отвечающее этому уровню и числу наблюдений.

Если $t > t_r$, то x_B можно отбросить: вероятность появления наблюдения, дающего $t > t_r$, мала и равна принятому уровню значимости. С уменьшением q растет t_r и условие $t > t_r$ выполняется труднее.

14. Доверительные интервалы.

Получив номинальное значение A , представляет интерес выяснить, насколько она может изменяться при повторных измерениях, выполняемых в тех же условиях. Этот вопрос выясняется с помощью построения доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины.

Доверительным называется интервал, который с заданной вероятностью, называемой доверительной, накрывает истинное значение измеряемой величины.

Обычно доверительные интервалы строят, основываясь на распределении Стьюдента, которым называют распределение случайной величины:

$$t = \frac{\bar{x} - A}{S_{\bar{x}}}, \quad (5.18)$$

где $S_{\bar{x}}$ — оценка среднего квадратического отклонения среднего арифмети-

ческого, вычисляемая по формуле: $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \tilde{\sigma}_{\bar{x}}$.

Доверительный интервал $[\bar{x} - t_q S_{\bar{x}}, \bar{x} + t_q S_{\bar{x}}]$ отвечает вероятности:

$$P\{|x - A| \leq t_q S_{\bar{x}}\} = \alpha, \quad (5.19)$$

где t_q — q -процентная точка распределения Стьюдента; значение t_q находят в таблице В-7 по числу степеней свободы $k = n - 1$ и уровню значимости $q = 1 - \alpha$.

Приведенные выше методы позволяют проверить допустимость гипотезы о нормальном распределении наблюдений и, следовательно, о допустимости применения распределений Стьюдента. Уровень значимости q , принимаемый для построения доверительного интервала, следовало бы согласовывать с уровнем значимости, принятым при проверке нормальности распределения, но эта задача не имеет пока определенного решения.

Доверительная вероятность не должна быть слишком низкой. В измерительной технике постепенно все чаще доверительную вероятность принимают равной 0,96 или 0,99 и лишь иногда 0,90. Эти цифры соответствуют соотношениям, изложенным ранее.

На практике доверительные интервалы строят на основе распределения Стьюдента, часто без проверки допустимости этого. То, что при этом, как правило, не возникает недоразумений, косвенно подтверждает высказанное выше мнение, что реальные распределения — это усеченные распределения, более «узкие», чем нормальные.

Если измерение выполняется изученным методом и известно среднее квадратическое отклонение наблюдений для этого метода σ , то доверительный интервал для A строят по нормальному распределению:

$$P\left\{|\bar{x} - A| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \alpha, \quad (5.20)$$

где α — выбранная доверительная вероятность;

n — число выполненных наблюдений;

$z_{\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль нормированного распределения Лапласа, которую

находят по таблице В-2 для вероятности равной $\alpha/2$.

Иногда строят доверительные интервалы для среднего квадратического отклонения. Для этого используют распределение χ^2 , приведенное в

таблице В-3. Доверительный интервал с границами $\frac{\sqrt{n-1}}{x_n} \tilde{\sigma}$ и $\frac{\sqrt{n-1}}{x_{\hat{a}}} \tilde{\sigma}$ для вероятности:

$$D = \left\{ \frac{\sqrt{n-1}}{x_n} \tilde{\sigma} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}}{x_{\hat{a}}} \tilde{\sigma} \right\} = \alpha \quad (5.21)$$

находят следующим образом. В таблице В-3 даны вероятности $P\{\chi^2 > \chi_q^2\}$.

Значение $\chi_{\text{в}}^2$ находят из таблицы для $p_{\text{в}} = \frac{1+\alpha}{2}$, а $\chi_{\text{н}}^2$ — для $p_{\text{н}} = \frac{1-\alpha}{2}$.

Например, получено $\tilde{\sigma} = 1,2 \times 10^{-5}$, $n = 10$. Примем $\alpha = 0,90$. Тогда $p_{\text{в}} = \frac{1+0,9}{2} = 0,95$, $p_{\text{н}} = \frac{1-0,9}{2} = 0,05$. Число степеней свободы $k = 10 - 1 = 9$.

По таблице В-3 находим $\chi_{\text{в}}^2 = 3,325$ и $\chi_{\text{н}}^2 = 16,92$. Доверительный интервал будет

$$\left[\frac{\sqrt{10-1}}{\sqrt{16,92}} \times 1,2 \times 10^{-5}; \frac{\sqrt{10-1}}{\sqrt{3,325}} \times 1,2 \times 10^{-5} \right],$$

т.е. $|0,88 \times 10^{-5}; 2,0 \times 10^{-5}|$.

Доверительная вероятность в этом случае может быть принята меньшей, чем при построении доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины. Часто можно считать достаточным $\alpha = 0,70$.

15. Толерантные интервалы.

Толерантным интервалом называется интервал, который с заданной вероятностью α содержит не менее чем заданную часть p_0 всей совокупности случайной величины (генеральной совокупности). Таким образом, толерантный интервал — интервал для случайной величины, и этим он в принципе отличается от доверительного интервала, который строится, чтобы накрыть неслучайную величину.

Границы толерантного интервала:

$$l_1 = \bar{x} - K_{\tilde{\sigma}} \quad \text{и} \quad l_2 = \bar{x} + K_{\tilde{\sigma}}, \quad (5.22)$$

где \bar{x} и $\bar{\sigma}$ вычисляются по формулам (5.1) и (5.4) на основе имеющейся группы данных.

Толерантный множитель вычисляется по формуле:

$$K = Z_{\infty} \left(1 + \frac{Z_{\alpha}}{\sqrt{2n}} + \frac{5Z_{\alpha}^2 + 10}{12n} \right), \quad (5.23)$$

где Z_{∞} и Z_{α} определяются по уравнениям:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_{\alpha}}^{Z_{\infty}} e^{-y^2/2} dy = 2\hat{O}(Z_{\infty}) = p_0, \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_{\alpha}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 0,5 - \hat{O}(Z_{\alpha}) = 1 - \alpha. \quad (5.25)$$

Значения $\Phi(Z)$ приведены в таблице В-2.

Для наиболее употребительных уровней α и p_0 составлены таблицы для определения толерантного множителя.

Если, например, измерена чувствительность группы тензорезисторов, то по полученным данным можно найти интервал с границами l_1, l_2 , в котором с заданной вероятностью α будет находиться чувствительность не менее части p_0 всей партии (или всей совокупности) тензорезисторов данного типа.

Термин «толерантный интервал» часто интерпретируют как допусквой интервал, а «толерантные границы» — как границы поля допуска, допуск. Однако в такой трактовке этих терминов есть существенная неточность.

Допуск, или границы поля допуска, устанавливают, как правило, до изготовления изделия и так, что изделия, интересующий нас параметр которых выходит за пределы поля допуска, признаются негодными, бракуются. Иными словами, границы поля допуска — жесткие, не связанные ни с какими вероятностными соотношениями.

Толерантный же интервал определяют на основе исследований уже изготовленных изделий и вычисляют его границы так, чтобы с заданной ве-

роятностью в этот интервал попадали параметры заданной доли всего возможного числа изделий. Таким образом, границы толерантного интервала, так же как и границы доверительного интервала, — случайные величины, и этим они отличаются от допусковых границ, или допусков, которые являются неслучайными.

16. Проверка однородности наблюдений.

Измерения с большими случайными погрешностям требуют настороженного внимания. Необходимо удостовериться в том, что получаемые результаты статистически подконтрольны, устойчивы, т.е. что результаты наблюдений группируются вокруг одного и того же центра и имеют одну и ту же дисперсию. Если метод измерения и объем исследования изучены мало, то наблюдения при таком измерении нужно повторять до тех пор, пока не появится уверенность в устойчивом характере этих результатов. Тем самым определяются продолжительность исследования и необходимое число наблюдений.

Устойчивость измерений часто оценивается интуитивно на основе длительных наблюдений. Однако известны математические методы, полезные для решения рассматриваемой задачи, так называемые методы проверки однородности. Применительно к измерениям рассматривается однородность групп наблюдений. Необходимые признаки однородности групп наблюдений состоят в том, что оценки средних арифметических и дисперсий не должны иметь значимых смещений относительно друг друга.

Выполнение необходимых признаков однородности — условие необходимое, но недостаточное для действительной однородности, так как группы наблюдений можно неправильно или неудачно выбрать.

17. Анализ точечных диаграмм.

Точечную диаграмму строят в координатах «результат измерения (наблюдение при измерении) X — номер измерения N ». При построении диаграммы из технических соображений по оси ординат обычно предпочитают откладывать не единичные результаты измерений, а их отклонения от неко-

того условного значения. Масштаб желательно выбрать таким, чтобы размах R результатов измерений можно было оценить двумя значащими цифрами.

Идеальная точечная диаграмма должна состоять из точек, располагающихся на одинаковой высоте, которая соответствует истинному значению измеряемой физической величины Q (рисунок 3).

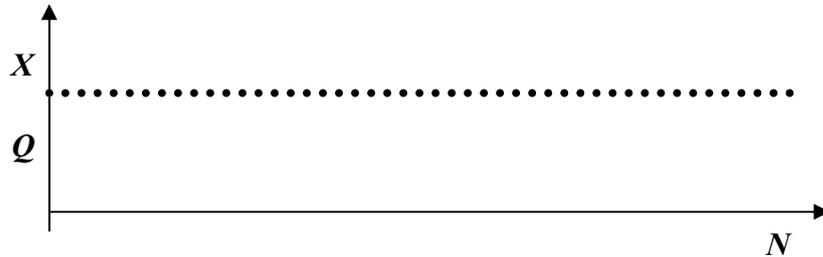


Рисунок 3 — Идеальная точечная диаграмма

Тенденция изменения результатов может быть вызвана только наличием систематической переменной погрешности определенного вида, следовательно, появляется возможность ее качественного описания, дополненного некоторыми числовыми оценками.

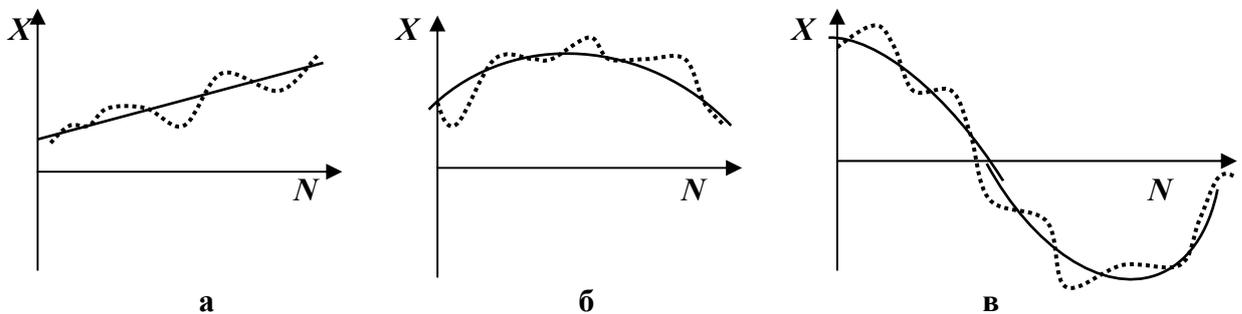


Рисунок 4 — Точечные диаграммы с тенденциями изменения результатов:
а — прогрессирующая, *б* — переменная с модой, *в* — переменная периодическая

Тенденции изменения результатов на точечных диаграммах, представленных на рисунке 4 (*а* — наклон, *б* — мода, *в* — гармонические изменения аппроксимирующей линии), свидетельствуют о наличии переменных систематических погрешностей. Характер таких погрешностей в первом приближении можно оценить по виду наблюдаемой тенденции изменения результатов, для оформления которой используют аппроксимирующие линии. Аппроксимацию, как правило, осуществляют простейшими линиями: пря-

мой, участком дуги окружности или параболы, для периодических изменений — синусоидой (косинусоидой).

Отклонения результатов от аппроксимирующей линии могут рассматриваться как случайные составляющие погрешности измерения. Если отклонения результатов от аппроксимирующей линии полагают случайными, их оценивают размахом, предельными значениями или средними квадратическими отклонениями (в последнем случае необходима статистическая обработка отклонений).

Следует помнить, что точечная диаграмма фактически не является графиком результатов измерений, поскольку по оси абсцисс не откладывают аргумент какой-либо функции. Любая тенденция изменения результатов свидетельствует только об изменении во времени аргументов, вызывающих переменные систематические погрешности измерений, причем сам аргумент по точечной диаграмме выявить невозможно. Проведение аппроксимирующей линии и оценка тенденции и отклонений от нее осуществляются на основе предположения (допущения) о равномерном изменении аргумента от измерения к измерению, что накладывает определенные ограничения на методику проведения серии многократных измерений одной и той же физической величины. К таким ограничениям относятся неизменность МВИ и измеряемой физической величины, постоянство условий в широком смысле, включая не только поддержание влияющих величин в нормальной или рабочей области значений, но и психофизиологическое состояние оператора. Серия должна состоять из наблюдений через примерно одинаковые промежутки времени без перерывов и не может продолжаться до явного утомления оператора, замена которого может привести к получению второй серии.

Многократные измерения одной и той же физической величины с использованием одной методики выполнения измерений позволяют численно оценить сходимость измерений внутри серии. Высокая сходимость результатов отражается на диаграмме отсутствием тенденций изменения результатов и малыми случайными отклонениями от среднего значения. В качестве пер-

вичной оценки погрешности измерений в серии может быть использован такой параметр, как размах результатов многократных измерений

$$R' = X_{\max} - X_{\min}. \quad (5.26)$$

Геометрическое представление размаха R' результатов измерений на точечной диаграмме можно получить, проведя через самую верхнюю и самую нижнюю точки прямые, параллельные оси абсцисс.

Размах R' включает в себя как рассеяние результатов из-за случайной составляющей погрешности измерений, так и переменную систематическую составляющую погрешности, вызывающую закономерное изменение результатов во времени. Следует различать размахи «неисправленных» R' и «исправленных» R результатов измерений. «Исправленными» принято называть результаты после исключения из них систематических погрешностей.

«Частичное исправление» результатов измерений с использованием точечной диаграммы можно осуществить наложением на экспериментальные точки аппроксимирующей линии и переходом к оценке случайных составляющих погрешности по отклонениям результатов от построенной тенденции их изменения. Аппроксимирующую линию в этом случае считают отражением систематического изменения результатов, а отклонения от построенной тенденции («текущего среднего значения») рассматривают как случайные составляющие каждого из наблюдений. Числовые оценки отклонений определяют по точечной диаграмме с учетом ее масштаба. Предложенный прием позволяет наглядно разделить систематические и случайные составляющие погрешности измерений.

Выбор групп для контроля однородности остается задачей специалиста-экспериментатора, так же как и отграничение одной группы от другой. Обычно наблюдения, выполненные через большие интервалы времени, чем время для получения какой-то совокупности результатов наблюдений, относят к разным группам. Целесообразно иметь в группе примерно 10 наблюдений (от 5 до 10 наблюдений согласно работе [50, с. 123]), лучше — несколько таких групп, чем одну группу с большим числом наблюдений.

Приведем некоторые из числа наиболее часто применяемых методов проверки допустимости различия между оценками дисперсий и различия между средними арифметическими групп наблюдений. Предполагается, что распределения наблюдений предварительно проверены на нормальность.

Проверка допустимости, различия между оценками дисперсий выполняется с помощью критерия Р. Фишера в случае двух групп наблюдений и критерия М. Бартлетта, если групп больше. Приведем последовательно оба метода.

Пусть несмещенные оценки дисперсий этих групп S_1^2 и S_2^2 , причем $S_1^2 > S_2^2$. Число наблюдений в группах n_1 и n_2 , так что степени свободы равны соответственно $k = n_1 - 1$ и $k = n_2 - 1$. Составляем отношение:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \quad (5.27)$$

Затем из таблицы В-8 и В-9, где приведены вероятности:

$$P\{F > F_q\} = q, \quad (5.28)$$

для различных степеней свободы k_1 и k_2 выбираем значение F_q .

Гипотеза принимается, т.е. оценки дисперсий можно считать отвечающими одной и той же дисперсии, если выполняется неравенство $F < F_q$. Уровень значимости при этом равен $2q$.

Теперь пусть у нас есть L групп и для них найдены $S_1^2 \dots S_L^2$ — несмещенные оценки дисперсий групп наблюдений ($L > 2$), каждая из которых имеет $k_i = n_i - 1$ степеней свободы, причем все $k_i > 3$. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий групп основана на статистике:

$$M = N \ln\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^L k_i S_i^2\right) - \sum_{i=1}^L k_i \ln S_i^2, \quad (5.29)$$

где $N = \sum_{i=1}^L k_i$.

Если гипотеза о равенстве дисперсий верна, то отношение:

$$\chi_1^2 = \frac{M}{1 + \frac{1}{3(L-1)} \left(\sum_{i=1}^L \frac{1}{k_i} - \frac{1}{N} \right)} \quad (5.30)$$

распределено приближенно как χ^2 с $L - 1$ степенями свободы.

Задаваясь уровнем значимости q , из таблицы В-3 находим χ_q^2 такое, что $P\{\chi^2 > \chi_q^2\} = q$. Если выполняется неравенство $\chi_1^2 < \chi_q^2$, то различия между оценками дисперсий допустимы.

Проверка допустимости различий между средними арифметическими выполняется тоже по-разному в случае двух групп наблюдений и если этих групп больше.

Рассмотрим сначала сравнение средних арифметических для двух групп наблюдений, когда наблюдений много, так что каждую из оценок дисперсий можно считать совпадающей со своей дисперсией.

Обозначим через $\bar{x}_1, \tilde{\sigma}_1^2, n_1$ данные, относящиеся к одной группе, а через $\bar{x}_2, \sigma_2^2, n_2$ — ко второй. Составим разность $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

Затем, выбрав определенный уровень значимости q , находим $\alpha = 1 - q$ и по таблице В-2 — аргумент $Z_{\alpha/2}$ функции Лапласа, соответствующий вероятности $\alpha/2$.

Различие между средними арифметическими считается допустимым, если

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq Z_{\alpha/2} \sigma(\bar{x}_1 - \bar{x}_2). \quad (5.31)$$

Если дисперсии групп неизвестны, то задача решается лишь при условии, что обе группы имеют одинаковые дисперсии (оценки этой дисперсии σ_1^2 и $\tilde{\sigma}_2^2$ могут, естественно, отличаться). В этом случае вычисляется:

$$t = \frac{|\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)\tilde{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \quad (5.32)$$

Затем, задаваясь уровнем значимости q , по таблице В-7 для распределения Стьюдента при числе степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$ находим t_q . Различие между средними арифметическими считается допустимым, если $t < t_q$.

При большом числе групп допустимость различия между средними арифметическими проверяется с помощью критериев Р. Фишера и Э. Аббе. Для применения каждого из них необходимо предварительно проверить, что все группы имеют одну и ту же дисперсию.

Метод Фишера состоит в сравнении оценок межгрупповой дисперсии S_L^2 и средней дисперсии групп \bar{S}^2 :

$$S_L^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2, \quad (5.33)$$

где

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^L n_i \bar{x}_i}{N} \quad \text{и} \quad N = \sum_{i=1}^L n_i \quad (5.34)$$

(оценка S_L^2 имеет $k_1 = L - 1$ степеней свободы);

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^L \sum_{\gamma=1}^{n_i} (x_{\gamma i} - \bar{x}_i)^2 \quad (5.35)$$

(число степеней свободы $k_2 = N - L$).

Обе оценки дисперсий имеют χ -распределение с числом степеней свободы соответственно k_1 и k_2 . Их отношение имеет распределение Фишера с теми же степенями свободы.

Рассеивание средних арифметических считают допустимым, если $F = S_L^2 / \bar{S}^2$ при выбранной вероятности α лежит в пределах F_H и F_B :

$$P\{F_H \leq F \leq F_B\} = \alpha. \quad (5.36)$$

Верхние пределы распределения Фишера F_B приведены в таблице В-8 и В-9, нижние находят по соотношению $F_H = 1/F_B$. Если уровни значимости

при нахождении F_H и F_B приняты одинаковыми: $q_1 = q_2 = q$, — то общий уровень значимости критерия будет $2q$:

$$\alpha = 1 - 2q. \quad (5.37)$$

Метод Аббе менее чувствителен к рассеиванию средних арифметических, чем метод Фишера, но зато позволяет выявлять монотонные смещения средних арифметических. Техника применения этого метода состоит в следующем.

Средние арифметические значения групп нужно выписать в последовательности, соответствующей очередности их получения: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L$.

Затем находят две несмещенные оценки дисперсии группы средних арифметических; одну — по обычной формуле:

$$S_1^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2, \quad (5.38)$$

где

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^L n_i \bar{x}_i \quad \text{и} \quad N = \sum_{i=1}^L n_i, \quad (5.39)$$

вторую — по формуле:

$$S_2^2 = \frac{1}{2(L-1)} \sum_{i=1}^{L-1} d_i^2, \quad (5.40)$$

где

$$d_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1, \dots; \quad d_i = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i, \dots; \quad d_{L-1} = \bar{x}_L - \bar{x}_{L-1}.$$

Отношение $v = S_2^2 / S_1^2$ должно быть меньше v_{\min} . Критические значения v_{\min} в зависимости от уровня значимости q и числа групп L приведены в таблице В-10.

Методика проверки допустимости рассеивания средних арифметических групп при разных дисперсиях групп тоже разработана, но она более сложная.

Нужно заметить, что значимое различие между средними арифметическими может служить как признаком наличия постоянной систематической погрешности в результатах наблюдений, так и признаком непостоянства интересующего нас параметра модели, поставленной в соответствие объекту исследования. Последнее означает, что постулат ν не выполняется и, следовательно, измерение с требуемой точностью осуществить нельзя.

18. Вычислить оценку среднего квадратического отклонения среднего арифметического исправленных результатов, т.е. результата измерения:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}}{\sqrt{N}}. \quad (5.41)$$

19. Вычислить доверительные границы погрешности результата измерения. Обычно доверительная вероятность принимается $P = 0,95$, в ответственных случаях берут $P = 0,99$ и выше.

$$\Delta = t \times \tilde{\sigma}_{\bar{x}}. \quad (5.42)$$

20. Записать результат измерения в стандартной форме:

$$\bar{x} \pm \Delta, P, \text{ где } (\Delta \approx \Delta). \quad (5.43)$$

Требования к оформлению результата измерений:

- наименьшие разряды должны быть одинаковы у точечной оценки результата и у характеристик погрешностей;
- характеристики погрешностей (или их статистические оценки) выражают числом, содержащим не более двух значащих цифр, при этом для статистических оценок цифра второго разряда округляется в большую сторону, если последующая цифра неуказываемого младшего разряда больше нуля.

Примеры форм представления результатов:

$(8,334 \pm 0,012)$ г; $P = 0,95$.

32,014 мм. Характеристики погрешностей и условия измерений по РД 50-98-86.

$(32,010 \dots 32,018)$ мм, $P = 0,95$. Измерение индикатором ИЧ кл. точности 0 на стандартной стойке с настройкой по концевым мерам 3 кл. точности.

Измерительное перемещение не более 0,1 мм; температурный режим измерений ± 2 °С.

$$72,6360 \text{ мм}; \Delta_{\text{н}} = -0,0012 \text{ мм}, \Delta_{\text{в}} = +0,0018 \text{ мм}, P = 0,95.$$

10,75 м³/с; $\sigma(\Delta) = 0,11$ м³/с, $\sigma(\Delta_{\text{с}}) = 0,18$ м³/с. Условия измерений: температура среды 20 °С, кинематическая вязкость измеряемого объекта $1,5 \times 10^{-6}$ м²/с.

Если неисключенные остатки систематической составляющей погрешности представляются значимыми и известны оценки границ этих погрешностей, то математическая обработка ведется с учетом влияния неисключенной систематической погрешности на результат измерения. Правила вычисления и суммирования неисключенной систематической составляющей со случайной для вычисления погрешности измерения — см. ГОСТ 8.207–76.

Формы записи результатов измерений регламентированы ГОСТ 8.011–72. Представление результата в одной из четырех стандартных форм требует обязательной математической обработки результатов многократных измерений.

5.2 Обработка результатов косвенных измерений

В ряде случаев прямые измерения неэффективны или невозможны, тогда измеряют не саму интересующую нас физическую величину, а некоторые величины, связанные с искомой известной зависимостью (определение угла по значениям катета и гипотенузы, площади — по линейным размерам и т.п.). Такие измерения называются косвенными и в общем виде характеризуются зависимостью:

$$Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n) . \quad (5.44)$$

Обработку результатов косвенных измерений проводят в такой последовательности (рисунок 5):

1. Вычислить для результатов каждого из прямых измерений:

$$\bar{x}_i, \tilde{\sigma}_{\bar{x}_i} ;$$

2. Вычислить результат косвенного измерения:

$$\bar{Q} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n); \quad (5.45)$$

3. Вычислить «вес» каждой погрешности косвенного измерения:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ при } x_i = \bar{x}_i; \quad (5.46)$$

4. Вычислить частные случайные погрешности косвенного измерения:

$$\tilde{E}\bar{x}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tilde{\sigma}_{\bar{x}_i}; \quad (5.47)$$

5. Вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата косвенного измерения:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{Q}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \tilde{\sigma}_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} R_{ij} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}_i} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}_j}}, \quad (5.48)$$

где R_{ij} — оценка коэффициента корреляции, определяемая из зависимости:

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{(n-1)\tilde{\sigma}_{\bar{x}_i}\tilde{\sigma}_{\bar{x}_j}} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j); \quad (5.49)$$

6. Определить коэффициент Стьюдента в зависимости от выбранной доверительной вероятности P по ГОСТ 8.207–76;

7. Вычислить границы случайной составляющей погрешности косвенного измерения, принимаемой за погрешность косвенного измерения при условии малости остаточных систематических составляющих погрешностей:

$$\Delta = \overset{0}{\Delta}, \quad (5.50)$$

$$\overset{0}{\Delta} = t \tilde{\sigma}_{\bar{Q}}; \quad (5.51)$$

8. Записать результат косвенного измерения в стандартной форме:

$$Q \pm \Delta, P. \quad (5.52)$$

В случае, когда погрешности прямых измерений не зависят друг от друга, коэффициент корреляции равен нулю и оценка среднего квадратического отклонения погрешности результата косвенного измерения рассчитывается по формуле:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{Q}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n E_{\bar{x}_i}^2}. \quad (5.53)$$

Обработка результатов косвенных измерений усложняется в случае наличия значимых неисключенных систематических погрешностей, которые необходимо вычислять и суммировать со случайной составляющей погрешности результата косвенного измерения, как и в предыдущем порядке математической обработки по правилам, приведенным в ГОСТ 8.207–76.

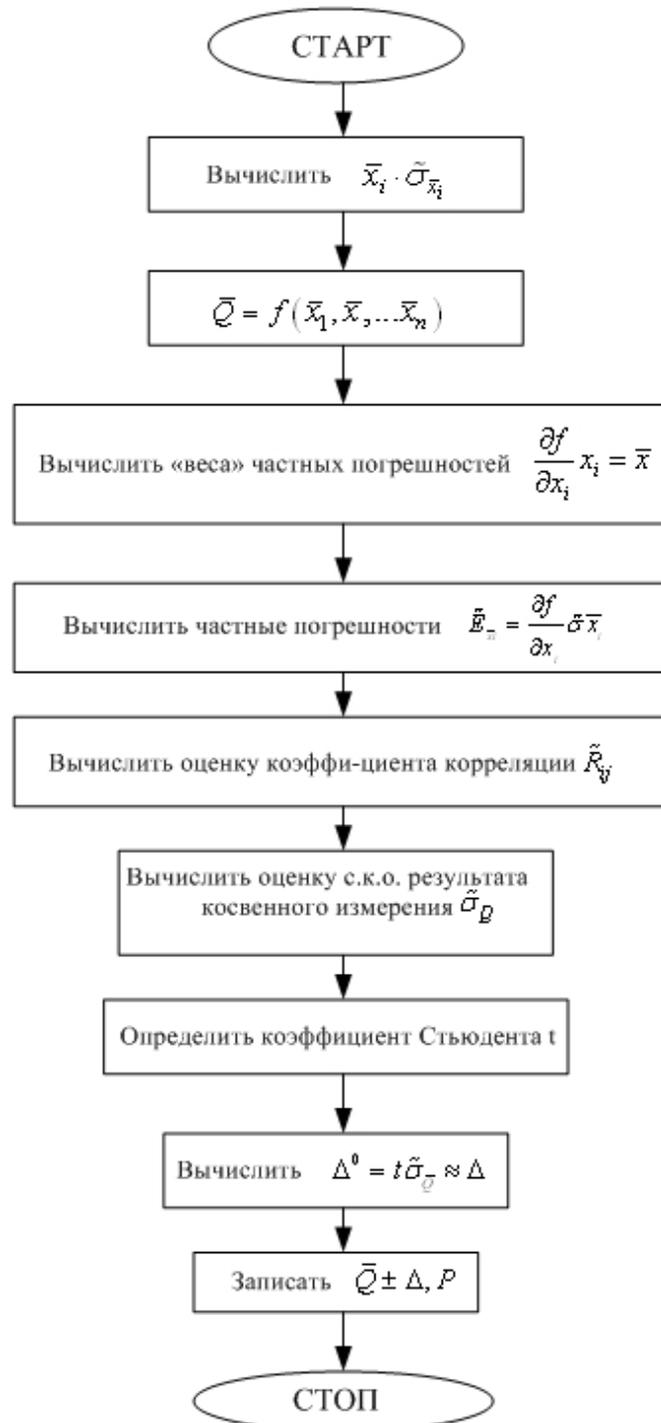


Рисунок 5 — Алгоритм математической обработки результатов косвенных измерений

Приложение А

Примерный перечень тем курсовых проектов (работ)

1. Измерение концентрации моющих растворов в ремонтном производстве.
2. Измерение освещенности в рассадном отделении теплицы.
3. Измерение освещенности в теплице.
4. Измерение температуры воздуха в цеху для переработки мяса (молока).
5. Измерение температуры воды в системе полива теплицы.
6. Измерение температуры воздуха в зернохранилище.
7. Измерение температуры воздуха в картофелехранилище.
8. Измерение силы тока в цепи.
9. Измерение крутящего момента на валу электродвигателя.
10. Измерение частоты вращения вала электродвигателя.
11. Измерение жирности молока.
12. Измерение количества белка в молоке.
13. Измерение давления воздуха в системе.
14. Измерение уровня жидкости в ёмкости.
15. Измерение влажности сыпучих материалов.
16. Измерение влажности воздуха в теплице.
17. Измерение влажности воздуха в животноводческом помещении.
18. Измерение сопротивления заземления.
19. Измерение напряжения на клеммах аккумуляторной батареи.
20. Измерение температуры масла в обкатываемом двигателе.
21. Измерение напряжения при помощи электронно-лучевого осциллографа.
22. Измерение потребляемой электрической энергии.
23. Измерение частоты тока в сети.
24. Измерение уровня сыпучих материалов.
25. Измерение скорости движения воздуха в раздаточном воздуховоде.
26. Измерение температуры почвы.
27. Измерение расхода газа.
28. Измерение расхода топлива.
29. Измерение ёмкости конденсатора.
30. Измерение ёмкости в электрической цепи.
31. Измерение индуктивности катушки.
32. Измерение влажности и содержания (%) крахмала в картофеле.
33. Измерение влажности зерна.
34. Измерение влажности колбасных изделий.
35. Определение качества измельчения и смешивания.
36. Измерение плотности раствора.
37. Измерение вязкости жидкости.
38. Измерение расхода воды.
39. Измерение вибраций.
40. Измерение массы материалов.

Приложение Б

Список рекомендуемой литературы

1. Метрология, стандартизация, сертификация и электроизмерительная техника : учеб. пособие / К.К. Ким [и др.]. — СПб.: Питер, 2006.
2. Дерябина, М.Ю. Основы измерений: учебное пособие для студентов специальности Т.13.01 «Метрология, стандартизация и сертификация» / М.Ю. Дерябина. — М.: БГУИР, 2001. — 58 с.
3. Сергеев, А.Г. Метрология : учеб. пособие для студ.вузов / А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. — М.: Логос, 2001. — 376 с.
4. Сергеев, А.Г. Метрология : учеб. пособие для студ. вузов / А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. — М.: Логос, 2002. — 408 с.: ил. — Библиогр.: 394 с.
5. Тейлор, Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор; пер. с англ. — М.: Мир, 1985.
6. Электрические измерения : учебник для вузов / Байда Л.И. [и др.]; под. ред. А.В. Фремке. — 4-е изд. — Л.: Энергия, 1973.
7. Спектор, С.А. Электрические измерения физических величин: Методы измерений : учеб. пособие для вузов / С.А. Спектор. — Л.: Энергоатомиздат, 1987.
8. Бурдун, Г.Д. Основы метрологии : учеб. пособие для вузов / Г.Д. Бурдун, Б.Н. Марков. — 2-е изд., доп. — М.: Изд-во стандартов, 1975.
9. Тюрин, Н.И. Введение в метрологию / Н.И. Тюрин. — М.: Изд-во стандартов, 1985.
10. Панев, Б.И. Электрические измерения : справочник (в вопросах и ответах) / Б.И. Панев. — М.: Агпропромиздат, 1987. — 224 с.
11. Контрольно-измерительные приборы в сельскохозяйственном производстве : справ. пособие / Бохан Н.И., Дайнеко В.А., Фурсенко С.Н. — Мн.: Ураджай, 1989. — 160 с.
12. Измерение в промышленности : справочные издания : в 3-х кн. / пер. с нем.; под ред. П. Профоса. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Металлургия, 1990. — 492 с.
13. Кравцов, А.В. Метрология и электрические измерения : учебник для студентов вузов по специальности 311400 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» / А.В. Кравцов; под ред. Н.К. Петрова — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Колос, 1999. — 216 с.
14. Чертов, А.Г. Физические величины (терминология, определения, обозначения, размерности, единицы) : справоч. Пособие / А.Г. Чертов. — М.: Высш. шк., 1990. — 335 с.
15. Шишкин, И.Ф. Основы метрологии, стандартизации и контроля качества / И.Ф. Шишкин. — М.: Издательство стандартов, 1988.
16. Шишкин, И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством / И.Ф. Шишкин. — М.: Издательство стандартов, 1990.
17. Приборы и устройства для контроля и регулирования : Каталог продукции 2002 / Бел. гос. ин-т стандартизации и сертификации; Гос. система каталогизации продукции. — Мн.: БелГИСС, 2002. — 283.
18. Куликов, Е.И. Методы измерения случайных процессов / Е.И. Куликов. — М.: Радио и связь, 1986.
19. Измерения в электронике : справочник / под ред. Кузнецова В.А. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
20. Сергеев, А.Г. Метрология : учеб. пособие для вузов / А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. — М.: Логос, 2000. — 408 с.
21. Шишкин, И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством : учеб. пособие для вузов / И.Ф. Шишкин. — М.: Изд-во стандартов, 1990. — 342 с.
22. Новицкий, П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. — Л.: Энергоиздат, 1985. — 248 с.
23. Основы метрологии и электрические измерения : учебник для вузов / под. ред. Душина Е.М. — 6-е изд.; перераб. и доп. — Л.: Энергоатомиздат, 1987. — 480 с.

24. Измерение электрических и неэлектрических величин : учеб. пособие для вузов / под общ. ред. Евтихьева Н.Н. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 352 с.
25. Левшина, Е.С. Электрические измерения физических величин: (Измерительные преобразователи) : учеб. пособие для вузов / Левшина Е.С., Новицкий П.В. — Л.: Энергоатомиздат, 1983. — 320 с.
26. Бриндли, К. Измерительные преобразователи : справоч. Пособие / К. Бриндли; пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 144 с.
27. Информационно-измерительная техника и технологии / под ред. Паннеева Г.Г. — М.: Высш. шк., 2002. — 454 с.
28. Качество измерений : Метрологическая справочная книга / Селиванов М.Н., Фридман А.Э., Кудряшова Ж.В. — Л.: Лениздат, 1987. — 295 с.
29. Артемьев, Б.Г. Справочное пособие для работников метрологических служб : в 2 кн. / Артемьев Б.Г., Голубев С.М. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во стандартов, 1990.
30. Окрепилов, В.В. Управление качеством : учебник для вузов / В.В. Окрепилов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ОАО «Изд-во «Экономика», 1998. — 639 с.
31. Основные термины в области метрологии : Словарь-справочник / Юдин М.Ф. [и др.]; под ред. Ю.В. Тарбеева. — М.: Изд-во стандартов, 1989. — 113 с.
32. Оценка качества электроизмерительных приборов / Л.Г. Тульчин [и др.]. — Л.: Энергоиздат, 1982.
33. Всеобщее управление качеством / под ред. Глудкина О.П. — М.: Радио и связь, 1999. — 600 с.
34. Быков, В.П. Методика проектирования объектов новой техники / В.П. Быков. — М.: Высш. шк., 1990. — 167 с.
35. Карданская, Н.Л. Принятие управленческих решений / Н.Л. Карданская. — М.: Юнити, 1999. — 407 с.
36. Эддоус, М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стенфилд. — М.: Юнити, 1997. — 510 с.
37. Грешилов, А.А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях / А.А. Грешилов. — М.: Радио и связь, 1991. — 320 с.
38. Автоматизация метрологического обслуживания средств измерений промышленного предприятия / под ред. Игнаткина В.У. — М.: Изд-во стандартов, 1988. — 280 с.
39. Крылова, Г.Д. Основы стандартизации, сертификации и метрологии / Г.Д. Крылова. — М.: Аудит, Юнити, 1998. — 479 с.
40. Ногин, В.Н. Аналоговые электронные устройства / В.Н. Ногин. — М.: Радио и связь, 1992. — 301 с.
41. Автоматизация схмотехнического проектирования / под ред. Ильина В.Н. — М.: Радио и связь, 1987. — 230 с.
42. Выполнение электрических схем по ЕСКД : справочник / С.Т. Усатенко, Т.К. Каченюк, М.В. Терехова. — М.: Изд-во стандартов, 1989. — 325 с.
43. Единая система конструкторской документации: Справ. Пособие / Борушек С.С. и др. — М.: Изд-во стандартов, 1989. — 352 с.
44. Справочник конструктора РЭС: Компоненты, механизмы, надежность / Н.А. Барканов [и др.]; под ред. Р.Г. Варламова. — М.: Радио и связь, 1985.
45. Нормирование определение динамических свойств средств измерений / В.О. Арутюнов, В.А. Грановский, С.Г. Рабинович // Измерительная техника. — 1975. — № 12. — С. 25–27.
46. Безикович, Я.С. Приближенные вычисления / Я.С. Безикович. — Л.–М.: Гостехиздат, 1949. — 462 с.: ил.
47. Березина, В.В. Распределение результирующей погрешности измерительных устройств при многозначности составляющих / В.В. Березина, И.И. Рыбаков // Измерительная техника. — 1974. — № 3. — С. 13–15.

48. Браславский, Д.А. Точность измерительных устройств / Д.А. Браславский, В.В. Петров. — М.: Машиностроение, 1976. — 312 с.: ил.
49. Грановский, В.А. Методы обработки экспериментальных данных при определении динамических характеристик средств измерений / В.А. Грановский // Метрология. — 1975. — № 1. — С. 3–20.
50. Долинский, Е.Ф. Обработка результатов измерений / Е.Ф. Долинский. — 2-е изд. — М.: Изд-во стандартов, 1973. — 191 с.: ил.
51. Зайдель, А.И. Ошибки измерений физических величин / А.И. Зайдель. — Л.: Наука, 1974. — 108 с.: ил.
52. Кудряшова, Ж.Ф. Об оценивании измеряемой величины по двум группам наблюдений / Ж.Ф. Кудряшова // Автометрия. — 1972. — № 1. — С. 13–18.
53. Кудряшова, Ж.Ф. Методы обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях / Ж.Ф. Кудряшова, С.Г. Рабинович // Методы обработки результатов наблюдений при измерениях : (Тр. метрологических институтов СССР). — Л.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1975. — Вып. 172 (234). — С. 3–58.
54. Кудряшова, Ж.Ф. О композиции равномерных распределений / Ж.Ф. Кудряшова, С.Г. Рабинович // Методы обработки результатов наблюдений при измерениях : (Тр. метрологических институтов СССР). — Л.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1975. — Вып. 172 (234). — С. 58–62.
55. Основные понятия теории динамических измерений / К.П. Широков [и др.] // Измерительная техника. — 1975. — № 12. — С. 9–13.
56. Резник, К.А. Соотношение между погрешностями образцового и проверяемого приборов / К.А. Резник // Метрология. — 1971. — № 4. — С. 23–29.
57. Справочник по электроизмерительным приборам / под ред. Илюнина К.К. — Л.: Энергия, 1973. — 703 с.: ил.
58. Солопченко, Г.Н. Некорректные задачи измерительной техники / Г.Н. Солопченко // Измерительная техника. — 1974. — № 1. — С. 61–54.

Приложение В

Статистические таблицы

Таблица В-1 — Значение функции плотности вероятностей
нормированного распределения $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3980	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3713	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3323	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	3966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2037	2013	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2755	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1987	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1215
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица В-2 — Значения нормированной функции Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy$$

<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	2240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	38650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	48598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

Таблица В-3 — Значение q -процентных точек для χ^2 -распределения
 $(P(\chi^2 > \chi_q^2))$

Число степеней свободы $K = L - 1$	Уровень значимости q , %						
	99	98	95	90	80	70	50
1	0,00016	0,00063	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340
14	4,669	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338
17	6,408	7,255	8,762	10,085	12,002	13,531	16,338
18	7,015	7,906	9,396	10,865	12,857	14,440	17,338
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337
21	8,397	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337
24	10,356	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336
28	13,565	14,847	16,929	18,939	21,588	23,647	27,336
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336

Окончание таблицы В-3

Число степеней свободы $K = L - 1$	Уровень значимости q , %						
	30	20	10	5	2	1	0,5
1	1,074	1,642	2,706	3,841	5,419	6,635	7,879
2	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	10,597
3	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	12,838
4	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	14,860
5	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	16,750
6	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	18,548
7	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	20,278
8	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	21,955
9	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	23,589
10	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	25,188
11	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	26,757
12	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	28,300
13	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	29,819
14	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,149	31,319
15	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	32,801
16	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	34,267
17	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	35,718
18	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	37,156
19	21,689	23,900	27,204	30,144	33,667	36,191	38,582
20	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	39,997
21	23,852	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	41,401
22	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	42,796
23	26,016	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	44,181
24	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	45,558
25	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	46,928
26	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	48,290
27	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	49,645
28	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	50,993
29	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,538	52,336
30	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	53,672

Таблица В-4 — Значение q -процентных точек распределения

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{nS_*}$$

Число наблюдений	при $q/2, \%$			при $(1 - q)/2, \%$		
	1	5	10	90	95	99
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7400	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,8570	0,7539	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7479	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291
56	0,8606	0,8463	0,8366	0,7652	0,7541	0,7342

Таблица В-5 — Значение α из уравнения $1 - \sum_{k=0}^m C_n^k (1 - \alpha)^k \alpha^{n-k} = q$

n	m	Уровень значимости $q, \%$		
		1	2	3
10	1	0,98	0,98	0,96
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-55	2	0,99	0,99	0,98

Таблица В-6 – Значение q -процентных точек распределения

$$t_r = \frac{\max |x_i - \bar{x}|}{\tilde{\sigma}}$$

Число наблюдений	Уровень значимости q , %				
	01	05	1	5	10
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412
4	1,732	1,730	1,728	1,710	1,689
5	1,994	1,982	1,972	1,917	1,869
6	2,212	2,183	2,161	2,067	1,996
7	2,395	2,344	2,310	2,182	2,093
8	2,547	2,476	2,431	2,273	2,172
9	2,677	2,586	2,532	2,349	2,238
10	2,788	2,680	2,616	2,414	2,294
11	2,884	2,760	2,689	2,470	2,343
12	2,969	2,830	2,753	2,519	2,387
13	3,044	2,892	2,809	2,563	2,426
14	3,111	2,947	2,859	2,602	2,461
15	3,171	2,997	2,905	2,638	2,494
16	3,225	3,042	2,946	2,670	2,523
17	3,274	3,083	2,983	2,701	2,551
18	3,320	3,120	3,017	2,728	2,577
19	3,361	3,155	3,049	2,754	2,601
20	3,400	3,187	3,079	2,779	2,623
21	3,436	3,217	3,106	2,801	2,644
22	3,469	3,245	3,132	2,823	2,664
23	3,500	3,271	3,156	2,843	2,683
24	3,529	3,295	3,179	2,862	2,701
25	3,556	3,318	3,200	2,880	2,718
26	3,582	3,340	3,220	2,897	2,734
27	3,606	3,360	3,239	2,913	2,749
28	3,629	3,380	3,258	2,929	2,764
29	3,651	3,399	3,275	2,944	2,778
30	3,672	3,416	3,291	2,958	2,792
31	3,692	3,433	3,307	2,972	2,805
32	3,711	3,449	3,322	2,985	2,818
33	3,729	3,465	3,337	2,998	2,830
34	3,746	3,480	3,351	3,010	2,842
35	3,762	3,494	3,364	3,022	2,853
36	3,778	3,507	3,377	3,033	2,864
37	3,793	3,251	3,389	3,044	2,874
38	3,808	3,533	3,401	3,055	2,885
39	3,822	3,545	3,413	3,065	2,894
40	3,835	3,557	3,424	3,075	2,904

Окончание таблицы В-6

Число наблюдений	Уровень значимости q , %				
	01	05	1	5	10
1	3,848	3,568	3,435	3,084	2,913
42	3,861	3,579	3,445	3,094	2,922
43	3,873	3,590	3,455	3,103	2,931
44	3,885	3,600	3,465	3,112	2,940
45	3,896	3,610	3,474	3,120	2,948
46	3,907	3,620	3,483	3,129	2,956
47	3,918	3,630	3,492	3,137	2,964
48	3,928	3,639	3,501	3,145	2,972
49	3,938	3,648	3,510	3,152	2,980
50	3,948	3,656	3,518	3,160	2,987
51	3,957	3,665	3,526	3,167	2,994
52	3,966	3,673	3,534	3,175	3,001
53	3,975	3,681	3,542	3,183	3,008
54	3,984	3,689	3,550	3,191	3,015
55	3,993	3,696	3,558	3,199	3,022
56	4,002	3,703	3,565	3,206	3,035
57	4,010	3,710	3,572	3,213	3,042
58	4,018	3,717	3,579	3,220	3,048
59	4,026	3,723	3,586	3,227	3,054
60	4,034	3,729	3,592	3,233	3,060

Таблица В-7 – Значение q -процентных точек распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости $q = (1-\alpha) \times 100$, %		
	10	5	1
1	6,31	12,71	16,66
2	2,92	4,30	9,92
3	2,35	3,18	5,84
4	2,13	2,78	4,60
5	2,02	2,57	4,03
6	1,94	2,45	3,71
7	1,90	2,36	3,50
8	1,86	2,31	3,36
9	1,83	2,26	3,25
10	1,81	2,23	3,17
12	1,78	2,18	3,06
14	1,76	2,14	2,98
16	1,75	2,12	2,92
18	1,73	2,10	2,88
20	1,72	2,09	2,84
22	1,72	2,07	2,82
24	1,71	2,06	2,80
26	1,71	2,06	2,78
28	1,70	2,05	2,76
30	1,70	2,04	2,75
∞	1,64	1,96	2,58

Таблица В-8 — Значения верхних однопроцентных точек распределения $F_{0,01}=S_1^2/S_2^2$

k_2	Число степеней свободы k_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,46	99,48	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,83	26,60	26,35	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	13,93	13,69	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,68	9,47	9,24	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	7,31	7,09	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,27	6,07	5,85	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	5,28	5,06	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,92	4,73	4,51	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	4,33	4,12	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,21	4,02	3,80	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3,78	3,56	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,78	3,59	3,37	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,43	3,21	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,48	3,29	3,07	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	3,18	2,96	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,27	3,08	2,86	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,20	3,00	2,79	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	3,12	2,92	2,70	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,86	2,63	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,99	2,80	2,58	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,94	2,75	2,53	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,89	2,70	2,48	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,85	2,66	2,44	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,81	2,62	2,40	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,78	2,58	2,36	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,74	2,55	2,33	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,71	2,52	2,30	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,68	2,49	2,27	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,66	2,47	2,24	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,74	2,56	2,37	2,13	1,90
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,48	2,29	2,05	1,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,61	2,43	2,23	1,99	1,75
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,56	2,38	2,18	1,94	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,32	2,12	1,87	1,60
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,78	2,45	2,28	2,07	1,82	1,53
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,74	2,42	2,24	2,03	1,78	1,49
90	6,92	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,72	2,39	2,21	2,00	1,75	1,45
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,69	2,37	2,19	1,98	1,73	1,43
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,66	2,33	2,15	1,94	1,69	1,37
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,99	1,79	1,52	1,00

Таблица В-9 — Значения верхних пятипроцентных точек распределения $F_{0,05}=S_1^2/S_2^2$

k_2	Число степеней свободы k_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,64
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,57
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Таблица В-10 — Значение q -процентных точек распределения Аббе

Число групп L	Уровень значимости $q, \%$		
	0,1	1	5
4	0,2949	0,3128	0,3902
5	2080	2690	4102
6	1817	2808	4451
7	1848	3070	4680
8	2018	3314	4912
9	0,2210	0,3544	0,5121
10	2408	3759	5311
11	2598	3957	5482
12	2778	4140	5638
13	2949	4309	5778
14	0,3112	0,4466	0,5908
15	3266	4611	6027
16	3413	4746	6137
17	3552	4872	6237
18	3684	4989	6330
19	0,3809	0,5100	0,6417
20	3926	5203	6498