МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Раздел «ДИНАМИКА»

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по аграрному техническому образованию в качестве учебно-методического комплекса для студентов группы специальностей 74 06 Агроинженерия

В 2-х частях

Часть 1

Минск
БГАТУ
2013

УДК 531.3(07)
ББК 22.213я7
Т 33

Составители:
кандидат физико-математических наук, доцент *Ю. С. Биза*,
кандидат технических наук, доцент *Н. Л. Ракова*,
старший преподаватель *И. А. Тарасевич*

Рецензенты:
кафедра теоретической механики Учреждения образования «Белорусский национальный технический университет» (заведующий кафедрой теоретической механики БНТУ доктор физико-математических наук, профессор *А. В. Чигарев*);
ведущий научный сотрудник лаборатории «Виброзащита механических систем» ГНУ «Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси», кандидат технических наук, доцент *А. М. Гоман*

Т33 **Теоретическая механика. Раздел «Динамика»** : учебно-метод. комплекс. В 2-х ч. Ч. 1 / сост.: Ю. С. Биза, Н. Л. Ракова, И. А. Тарасевич. – Минск : БГАТУ, 2013. – 120 с.
ISBN 978-985-519-616-8**.**

В учебно-методическом комплексе представлены материалы по изучению раздела «Динамика», часть 1, входящего в состав дисциплины «Теоретическая механика». Включает курс лекций, основные материалы по выполнению практических занятий, задания и образцы выполнения заданий для самостоятельной работы и контроля учебной деятельности студентов очной и заочной форм обучения.

УДК 531.3(07)
ББК 22.213я7

ISBN 978-985-519-616-8 (Ч. 1)
ISBN 978-985-519-615-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 7
1. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА 8
1.1. Глоссарий 8
1.2. Темы лекций и их содержание 9
Глава 1. Введение в динамику. Основные понятия классической механики 12
Тема 1. Динамика материальной точки 15
1.1. Законы динамики материальной точки (законы Галилея – Ньютона) 15
1.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки 18
1.3. Две основные задачи динамики 19
Вопросы для повторения 21
Задачи для самостоятельного изучения 21
Тема 2. Динамика относительного движения материальной точки 23
Вопросы для повторения 25
Тема 3. Динамика механической системы 25
3.1. Геометрия масс. Центр масс механической системы 25
3.2. Внутренние силы 27
Вопросы для повторения 28
Тема 4. Моменты инерции твердого тела 28
4.1. Моменты инерции твердого тела относительно оси и полюса 28
4.2. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса – Штейнера) 33
4.3. Центробежные моменты инерции 35
Вопросы для повторения 36
Глава 2. Общие теоремы динамики материальной точки и механической системы 37

Тема 5. Теорема о движении центра масс системы 37
Вопросы для повторения 39
Задачи для самостоятельного изучения 39
Тема 6. Количество движения материальной точки и механической системы 43
6.1. Количество движения материальной точки 43
6.2. Импульс силы 45
6.3. Теорема об изменении количества движения материальной точки 46
6.4. Теорема об изменении главного вектора количества движения механической системы 47
Вопросы для повторения 49
Задачи для самостоятельного изучения 49
Тема 7. Момент количества движения материальной точки и механической системы относительно центра и оси 52
7.1. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси 52
7.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и оси 57
7.3. Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси 59
Вопросы для повторения 61
Задачи для самостоятельного изучения 61
Тема 8. Работа и мощность сил 64
Вопросы для повторения 72
Задачи для самостоятельного изучения 72
Тема 9. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы 75
9.1. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кенига 75
9.2. Кинетическая энергия твердого тела при различном движении 76
9.3. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки 78

9.4. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы 79
Вопросы для повторения 82
Задачи для самостоятельного изучения 82
Тема 10. Потенциальное силовое поле и потенциальная энергия 84
Вопросы для повторения 86
Тема 11. Динамика твердого тела 86
Вопросы для повторения 88
2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОНТРОЛЯ ПО МОДУЛЮ 89
3. ЗАДАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ 99
4. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ 113
5. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТУ) СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ 116
6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 118

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – наука об общих законах механического движения, равновесия и взаимодействия материальных тел.

Это одна из фундаментальных общенаучных физико-математических дисциплин. Она является теоретической основой современной техники.

Изучение теоретической механики, наряду с другими физико-математическими дисциплинами, способствует расширению научного кругозора, формирует способности к конкретному и абстрактному мышлению и способствует повышению общей технической культуры будущего специалиста.

Теоретическая механика, являясь научной базой всех технических дисциплин, способствует развитию навыков рациональных решений инженерных задач, связанных с эксплуатацией, ремонтом и конструированием сельскохозяйственных и мелиоративных машин и оборудования.

По характеру рассматриваемых задач механику разделяют на статику, кинематику и динамику. Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных сил.

В учебно-методическом комплексе (УМК) представлены материалы по изучению раздела «Динамика», который включает курс лекций, основные материалы для проведения практических работ, задания и образцы выполнения для самостоятельных работ и контроля учебной деятельности студентов очной и заочной форм обучения.

В результате изучения раздела «Динамика» студент должен усвоить теоретические основы динамики и овладеть основными методами решения задач динамики:

- знать методы решения задач динамики, общие теоремы динамики, принципы механики;

- уметь определять законы движения тела в зависимости от действующих на него сил; применять законы и теоремы механики для решения задач; определять статические и динамические реакции связей, ограничивающих движение тел.

Учебной программой дисциплины «Теоретическая механика» предусмотрено общее количество аудиторных часов – 136, в т. ч. на изучение раздела «Динамика» – 36 часов.

1. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

1.1. Глоссарий

Статика – раздел механики, в котором излагается общее учение о силах, изучается приведение сложных систем сил к простейшему виду и устанавливаются условия равновесия различных систем сил.

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучают движение материальных объектов вне зависимости от причин, вызывающих это движение, т. е. вне зависимости от сил, действующих на эти объекты.

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел (точек) под действием приложенных сил.

Материальная точка – материальное тело, различие в движении точек которого является несущественным.

Инертность – свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Масса тела – это скалярная положительная величина, зависящая от количества вещества, содержащегося в данном теле, и определяющая его меру инертности при поступательном движении.

Система отсчета – система координат, связанная с телом, по отношению к которому изучается движение другого тела.

Инерциальная система – система, в которой выполняются первый и второй законы динамики.

Импульс силы – векторная мера действия силы в течение некоторого времени.

Количество движения материальной точки – векторная мера ее движения, равная произведению массы точки на вектор ее скорости.

Кинетическая энергия – скалярная мера механического движения.

Кинетическая энергия материальной точки – скалярная положительная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Элементарная работа силы – это бесконечно малая скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечного малого перемещения точки приложения силы.

Кинетическая энергия – скалярная мера механического движения.

Кинетическая энергия материальной точки – скалярная положительная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Кинетическая энергия механической системы – арифметическая сумма кинетических энергий всех материальных точек этой системы.

Сила – мера механического взаимодействия тел, характеризующая его интенсивность и направленность.

1.2. Темы лекций и их содержание

Раздел 1. **Введение в динамику. Основные понятия классической механики**

Тема 1. **Динамика материальной точки**

Законы динамики материальной точки (законы Галилея – Ньютона). Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение второй задачи динамики; постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям.

Литература:[2], стр. 180-196, [3], стр. 12-26.

Тема 2. **Динамика относительного движения материальной точки**

Относительное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности в классической механике. Случай относительного покоя.

Литература: [2], стр. 180-196, [3], стр. 127-155.

Тема 3. **Геометрия масс. Центр масс механической системы**

Масса системы. Центр масс системы и его координаты.

Литература: [2], стр. 86-93, стр. 264-265

Тема 4. **Моменты инерции твердого тела**

Моменты инерции твердого тела относительно оси и полюса. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Осевые моменты инерции некоторых тел.

Центробежные моменты инерции как характеристика асимметрии тела.
Литература: [2], стр. 265-271, [3], стр. 155-173.

Раздел 2. **Общие теоремы динамики материальной точки и механической системы**

Тема 5. **Теорема о движении центра масс системы**

Теорема о движении центра масс системы. Следствия из теоремы о движении центра масс системы.
Литература: [2], стр. 274-277, [3], стр. 175-192.

Тема 6. **Количество движения материальной точки и механической системы**

Количество движения материальной точки и механической системы. Элементарный импульс и импульс силы за конечный промежуток времени. Теорема об изменении количества движения точки и системы в дифференциальной и интегральной формах. Закон сохранения количества движения.
Литература: [2], стр.280-284, [3], стр. 192-207.

Тема 7. **Момент количества движения материальной точки и механической системы относительно центра и оси**

Момент количества движения точки относительно центра и оси. Теорема об изменении момента количества движения точки. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси.
Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента системы. Закон сохранения кинетического момента.
Литература: [2], стр. 292-298, [3], стр. 207-258.

Тема 8. **Работа и мощность сил**

Элементарная работа силы, ее аналитическое выражение. Работа силы на конечном пути. Работа силы тяжести, силы упругости. Равенство нулю суммы работ внутренних сил, действующих в твердом теле. Работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Мощность. Коэффициент полезного действия.
Литература: [2], стр. 208-213, [3], стр. 280-290.

Тема 9. **Кинетическая энергия материальной точки и механической системы**

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела в различных случаях его движения. Теорема Кенига. Теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной и интегральной формах. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной и интегральной формах.
Литература: [2], стр. 301-310, [3], стр. 290-344.

Тема 10. **Потенциальное силовое поле и потенциальная энергия**

Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия.
Литература: [2], стр. 317-320, [3], стр. 344-347.

Тема 11. **Динамика твердого тела**

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.
Литература: [2], стр. 323-334, [3], стр. 157-173.

Раздел 1. **Введение в динамику. Основные понятия классической механики**

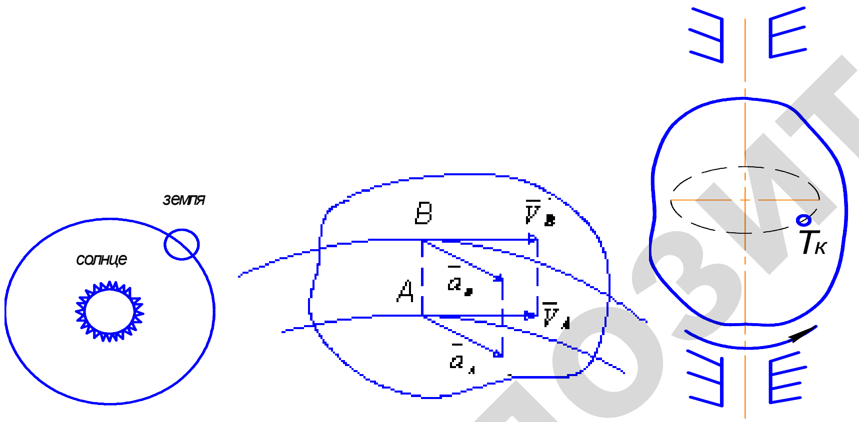
Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел (точек) под действием приложенных сил.

Материальное тело – тело, имеющее массу.

Материальная точка – материальное тело, различие в движении точек которого является несущественным. Это может быть как тело, размерами которого при его движении можно пренебречь, так и тело конечных размеров, если оно движется поступательно.

Материальными точками называют также частицы, на которые мысленно разбивается твердое тело при определении некоторых его динамических характеристик. Примеры материальных точек (рис. 1): *а* – движение Земли вокруг Солнца. Земля – материальная точка; *б* – поступательное движение твердого тела. Твердое тело – материальная точка, т. к. $\overline{V}_B = \overline{V}_A$; $\overline{a}_B = \overline{a}_A$; *в* – вращение тела вокруг оси. Частица тела – материальная точка.

Инертность – свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.



а *б* *в*

Рис. 1

Масса тела – это скалярная положительная величина, зависящая от количества вещества, содержащегося в данном теле, и определяющая его меру инертности при поступательном движении. В классической механике масса – величина постоянная.

Сила – количественная мера механического взаимодействия между телами или между телом (точкой) и полем (электрическим, магнитным и т. д.).

Сила – векторная величина, характеризующаяся величиной, точкой приложения и направлением (линией действия) (рис. 2: *А* – точка приложения; *АВ* – линия действия силы).

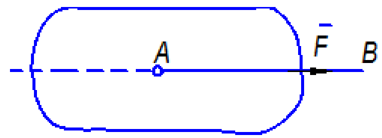


Рис. 2

В динамике наряду с постоянными силами имеют место и переменные силы, которые могут зависеть от времени t, скорости $\vec{\vartheta}$, расстояния $\overline{r}$ или от совокупности этих величин, т. е.

$$\left|\begin{array}{l} \overline{F} = \overline{\mathrm{const}}; \\ \overline{F} = \overline{F}(t); \\ \overline{F} = \overline{F}(\overline{\vartheta}); \\ \overline{F} = \overline{F}(\overline{r}); \\ \overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{\vartheta}). \end{array}\right.$$

Примеры таких сил приведены на рис. 3: $a - \overline{G} = \overline{\mathrm{const}}$ – вес тела; $\overline{R} = \overline{R}(\overline{\vartheta})$ – сила сопротивления воздуха; $б - \overline{F}_т = \overline{F}(t)$ – сила тяги электровоза; $в - \overline{F} = \overline{F}(\overline{r})$ – сила отталкивания от центра O или притяжения к нему.

Система отсчета – система координат, связанная с телом, по отношению к которому изучается движение другого тела.

*Инерциальная с*истема – система, в которой выполняются первый и второй законы динамики. Это неподвижная система координат либо система, движущаяся равномерно и прямолинейно поступательно.

Движение в механике – это изменение положения тела в пространстве и во времени по отношению к другим телам.

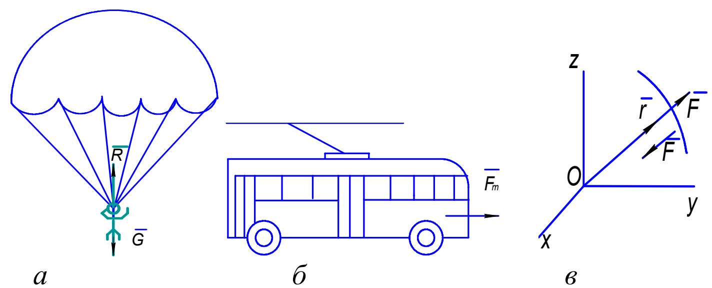


Рис. 3

Пространство в классической механике трехмерное, подчиняющееся эвклидовой геометрии.

Время – скалярная величина, одинаково протекающая в любых системах отсчета.

Система единиц – это совокупность единиц измерения физических величин. Для измерения всех механических величин достаточно трех основных единиц: единицы длины, времени, массы или силы.

Система единиц	СИ		СГС	
Механическая величина	Размерность	Обозначения	Размерность	Обозначения
Длина	метр	м	сантиметр	см
Время	секунда	с	секунда	с
Масса	килограмм-масса	кг	грамм-масса	г
Сила	ньютон	Н	дина	дин

Все остальные единицы измерения механических величин – производные от этих. Применяются два типа систем единиц: международная система единиц СИ (или более мелкая – СГС) и техническая система единиц – МКГСС.

Тема 1. **Динамика материальной точки**

1.1. Законы динамики материальной точки (законы Галилея – Ньютона)

Первый закон (закон инерции).

Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил или под действием уравновешенной системы сил, называется движением по инерции.

Например, движение тела по гладкой (сила трения равна нулю) горизонтальной поверхности (рис. 4: $\overline{G}$ – вес тела; $\overline{N}$ — нормальная реакция плоскости).

Так как $\overline{G} = -\overline{N}$, то $\overline{G} + \overline{N} = 0$.

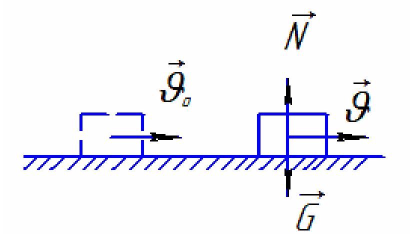
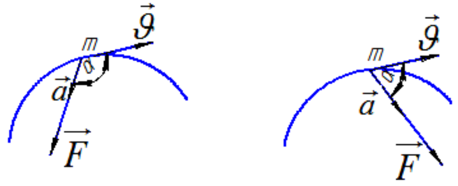


Рис. 4

При $\vartheta_0 \neq 0$ тело движется с той же скоростью; при $\vartheta_0 = 0$ тело покоится (ϑ_0 – начальная скорость).

Второй закон (основной закон динамики).

Произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а ее направление совпадает с направлением ускорения.



а *б*

Рис. 5

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\bar{a} = \bar{F} \qquad (1.1)$$

При $\bar{F} = \text{const}$, $\bar{a} = \text{const}$ – движение точки равнопеременное. Если $\bar{a} \neq \text{const}$, $\angle\alpha \succ \frac{\pi}{2}$ – движение замедленное (рис. 5, *а*); $\bar{a} \neq \text{const}$, $\angle\alpha \prec \frac{\pi}{2}$ – движение ускоренное (рис. 5, *б*); *m* – масса точки; $\bar{a}$ – вектор ускорения; $\bar{F}$ – вектор силы; $\vec{\vartheta}_0$ – вектор скорости).

При $\bar{F} = 0$, $\bar{a}_0 = 0 =\succ \vec{\vartheta}_0 = \text{const}$ – точка движется равномерно и прямолинейно либо при $\vec{\vartheta}_0 = 0$ – покоится (закон инерции). Второй закон позволяет установить связь между массой *m* тела, находящегося вблизи земной поверхности, и его весом *G*. $G = mg$, где g – ускорение свободного падения.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия).

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Так как силы $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$ приложены к разным точкам, то система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ не является уравновешенной, т. е. $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \approx 0$ (рис. 6).

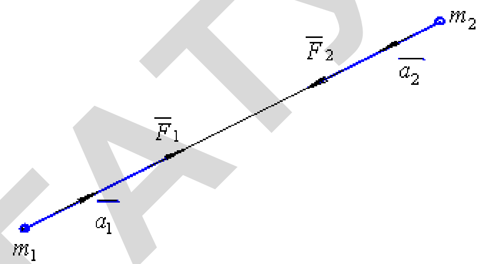


Рис. 6

В свою очередь $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$ – отношение масс взаимодействующих точек обратно пропорционально их ускорениям.

Четвертый закон (закон независимости действия сил).

Ускорение, получаемое точкой при действии на нее одновременно нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые получила бы точка при действии на нее каждой силы в отдельности.

Пояснение (рис. 7).

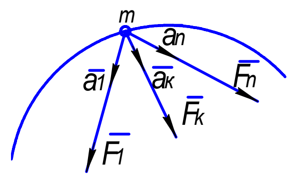


Рис. 7

Равнодействующая $\bar{R}$ сил $(\bar{F}_1, \ldots \bar{F}_k, \ldots \bar{F}_n)$.

Так как $m\bar{\bar{a}} = \bar{R}$, $\bar{F}_1 = m\bar{a}_1$, ..., $\bar{F}_k = m\bar{a}_k$, ..., $\bar{F}_n = m\bar{a}_n$, то $\bar{a} = \bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_k + \ldots + \bar{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k$, т. е. четвертый закон эквивалентен правилу сложения сил.

1.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть на материальную точку действуют одновременно несколько сил, среди которых есть как постоянные, так и переменные.

Запишем второй закон динамики в виде

$$m\bar{a}=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k=\bar{R}\left(t,\bar{r},\bar{\vartheta}\right). \tag{1.2}$$

Так как $\bar{a}=\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, $\bar{\vartheta}=\dfrac{d\bar{r}}{dt}$, где $\bar{r}$ – радиус-вектор движущейся точки, то (1.2) содержит производные от $\bar{r}$ и представляет собой дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме или основное уравнение динамики материальной точки.

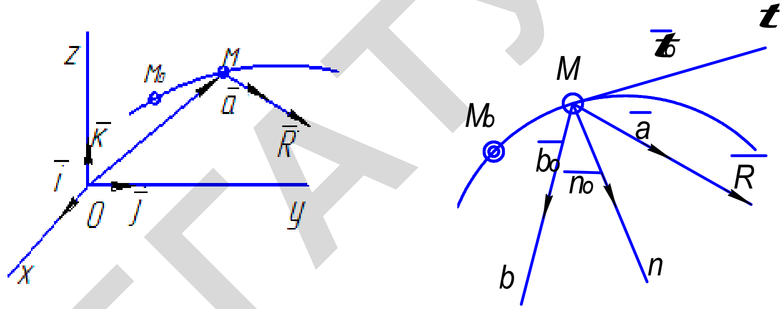
Проекции векторного равенства (1.2):

- на оси декартовых координат (рис. 8, *а*)

$$\begin{aligned}
ma_x&=m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx};\\
ma_y&=m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky};\\
ma_z&=m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz};
\end{aligned} \tag{1.3}$$

- на естественной оси (рис. 8, *б*)

$$\begin{aligned}
ma_\tau&=m\frac{d\vartheta}{dt}=\sum_{k=1}^{n}F_{k_\tau},\\
ma_n&=m\frac{\vartheta^2}{\rho}=\sum_{k=1}^{n}F_{k_n};\\
ma_b&=m\cdot 0=\sum_{k=1}^{n}F_{k_b}
\end{aligned} \tag{1.4}$$



а *б*

Рис. 8

Уравнения (1.3) и (1.4) являются дифференциальными уравнениями движения материальной точки соответственно в декартовых осях координат и естественных осях, т. е. естественными дифференциальными уравнениями, которые обычно применяются при криволинейном движении точки, если траектория точки и ее радиус кривизны известны.

1.3. Две основные задачи динамики для материальной точки и их решение

Первая (прямая) задача.

Зная закон движения и массу точки, определить силу, действующую на точку.

Для решения этой задачи необходимо знать ускорение точки. В задачах этого типа оно может быть задано непосредственно либо задан закон движения точки, в соответствии с которым оно может быть определено.

1. Так, если движение точки задано в декартовых координатах $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$ и $z=f_3(t)$, то определяются проекции ускорения на оси координат $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$ и $\ddot{z}=\dfrac{d^2z}{dt^2}$, а затем – проекции F_x, F_y и F_z силы на эти оси:

$$F_x=m\ddot{x},\ F_y=m\ddot{y},\ F_z=m\ddot{z}. \tag{1.5}$$

Модуль и направление силы определяется по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

$$\cos\left(\overline{F}, \bar{i}\right) = \frac{F_x}{F}, \ \cos\left(\overline{F}, \bar{j}\right) = \frac{F_y}{F}; \ \cos\left(\overline{F}, \bar{k}\right) = \frac{F_z}{F}. \qquad (1.6)$$

2. Если точка совершает криволинейное движение и известен закон движения $s = f(t)$, траектория точки и ее радиус кривизны ρ, то удобно пользоваться естественными осями, а проекции ускорения на эти оси определяются по известным формулам:

- на касательную ось

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \text{ – касательное ускорение;}$$

- на главную нормаль

$$a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} \text{ – нормальное ускорение.}$$

Проекция ускорения на бинормаль равна нулю. Тогда проекции силы на естественные оси

$$F_\tau = m\frac{d\vartheta}{dt}, \ F_n = m\frac{\vartheta^2}{\rho} \qquad (1.7)$$

Модуль и направление силы определяются по формулам:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}; \cos\left(\overline{F}, \overline{\tau_0}\right) = \frac{F_\tau}{F}; \ \cos\left(\overline{F}, \overline{n_0}\right) = \frac{F_n}{F}. \qquad (1.8)$$

Вторая (обратная) задача.

Зная действующие на точку силы, ее массу и начальные условия движения, определить закон движения точки или какие-либо другие ее кинематические характеристики.

Начальные условия движения точки в декартовых осях – это координаты точки x_0, y_0, z_0 и проекции начальной скорости ϑ_0 на эти

оси $\vartheta_{0x} = \dot{x}_0$, $\vartheta_{0y} = \dot{y}_0$ и $\vartheta_{0z} = \dot{z}_0$ в момент времени, соответствующий началу движения точки и принимаемый равным нулю.

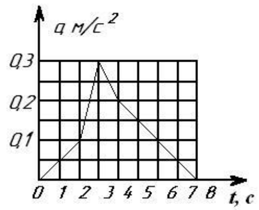
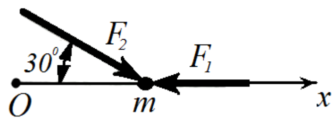
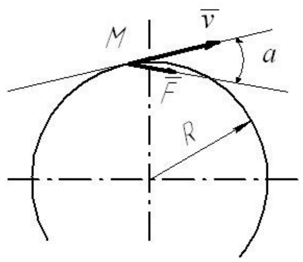
Решение задач этого типа сводится к составлению дифференциальных уравнений (или одного уравнения) движения материальной точки и их последующему решению путем непосредственного интегрирования или с использованием теории дифференциальных уравнений.

Вопросы на повторение

1. Что изучает динамика?
2. Какое движение называется движением по инерции?
3. При каком условии материальная точка будет покоиться или двигаться равномерно и прямолинейно?
4. В чем суть первой основной задачи динамики материальной точки? Второй задачи?
5. Запишите естественные дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Задачи для самостоятельного изучения

1. Точка массой $m = 4$ кг движется по горизонтальной прямой с ускорением $a = 0{,}3t$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени $t = 3$ с.
2. Деталь массой $m = 0{,}5$ кг скользит вниз по лотку. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, чтобы деталь двигалась с ускорением $a = 2$ м/с^2? Угол выразить в градусах.
3. Точка массой $m = 14$ кг движется по оси Ox с ускорением $a_x = 2t$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении движения в момент времени $t = 5$ с.

<table>
<tr><td>4.
</td><td>Ускорение движения точки массой по прямой задано графиком функции $a = a(t)$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке в момент времени $t = 3$ с.</td></tr>
<tr><td>5.
</td><td>Трактор, двигаясь с ускорением $a = 1$ м/с^2 по горизонтальному участку пути, перемещает нагруженные сани массой 600 кг. Определить силу тяги на крюке, если коэффициент трения скольжения саней $f = 0,04$.</td></tr>
<tr><td>6.
</td><td>Материальная точка массой $m = 5$ кг движется под действием сил $\vec{F}_1 = 3$ Н и $\vec{F}_2 = 10$ Н. Определить проекцию ускорения точки на ось Ox.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Тело движется вниз по наклонной шероховатой плоскости, которая образует с горизонтом угол 40°. Определить ускорение тела, если коэффициент трения скольжения $f = 0,3$.</td></tr>
<tr><td>8.
</td><td>Материальная точка M массой $m = 8$ кг движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 18$ м. Определить угол α в градусах между силой $\vec{F}$ и скоростью $\vec{\vartheta}$ в момент времени, когда скорость точки $\vartheta = 3$ м/с, а касательное ускорение $a_\tau = 0,5$ м/с^2.</td></tr>
</table>

9. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы, тангенциальная составляющая которой $F_\tau = 0,2t^2$, а нормальная составляющая $F_n = 8$ Н. Определить массу точки, если в момент времени $t = 10$ с ее ускорение $a = 0,7$ м/с^2.

10. Материальная точка массой $m = 5$ кг движется по криволинейной траектории под действием силы, проекция которой на касательную $F_\tau = 7$ Н, на нормаль $F_n = 0,1t^2$. Определить модуль ускорение точки в момент времени $t = 12$ с.

Тема 2. **Динамика относительного движения материальной точки**

Относительным движением материальной точки называется движение точки в подвижной системе координат.

Второй закон динамики в системе $O_1x_1y_1z_1$

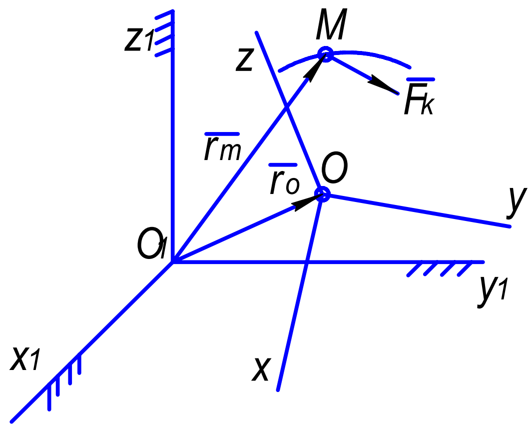


Рис. 15

$$m\overline{a}_{\text{абс}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k\ , \tag{2.1}$$

где $\overline{a}_{\text{абс}}$ – абсолютное ускорение точки, равное геометрической сумме переносного $\overline{a}_n$, относительного $\overline{a}_{\text{отн}}$ и кориолисова $\overline{a}_{\text{к}}$ ускорений, т. е.

$$\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{к}}. \tag{2.2}$$

Подставив (1.15) в (1.14), получим второй закон динамики в системе $Oxyz$ (рис. 15), т. е. в неинерциальной системе отсчета:

$$m\overline{a}_{\text{отн}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{F}^{\text{ин}}_{\text{пер}} + \overline{F}^{\text{ин}}_{\text{кор}}, \tag{2.3}$$

где $\overline{F}^{\text{ин}}_{\text{пер}} = -m\overline{a}_{\text{пер}}$ и $\overline{F}^{\text{ин}}_{\text{к}} = -m\overline{a}_{\text{к}}$ имеют размерность силы и называются переносной и кориолисовой силами инерции.

Проектируя уравнение (2.3) на подвижные оси $Oxyz$, получим дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в декартовых осях:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} + F^{\text{ин}}_{\text{пер}_x} + F^{\text{ин}}_{\text{к}_x};$$
$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} + F^{\text{ин}}_{\text{пер}_y} + F^{\text{ин}}_{\text{к}_y};$$
$$m\ddot{z} = \sum F_{kz} + F^{\text{ин}}_{\text{пер}_z} + F^{\text{ин}}_{\text{к}_z} \quad k = 1,\ \ldots,\ n.$$

Уравнение (2.3) можно также записать в проекциях на естественные оси.

Если точка в подвижной системе покоится, то $\overline{a}_{\text{отн}} = 0$, $\overline{\vartheta}_{\text{отн}} = 0$ и $\overline{F}_k = -2m\left(\overline{\omega}_e \cdot \overline{\vartheta}_{\text{отн}}\right) = 0$. Тогда (2.3) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{F}^{\text{ин}}_{\text{пер}} = 0 \tag{2.4}$$

(уравнение относительного равновесия (покоя) точки (тела) или принцип относительности Галилея).

В северном полушарии при движении тела по земной поверхности кориолисова сила инерции $\overline{F}^{\text{ин}}$ отклоняет тело вправо от направления движения. Этим объясняется боковое давление поезда на рельсы, подмыв правого берега рек, отклонение от вертикали к востоку свободно падающего тела на Землю.

Считая систему отсчета, связанную с Землей, неподвижной, мы тем самым исключаем из числа сил, действующих на движущееся тело, кориолисову силу инерции, что не всегда оправдано.

Вопросы для повторения

1. Как определяется модуль и направление переносной и кориолисовой сил инерции материальной точки?
2. В чем состоит отличие основного закона динамики относительного и абсолютного движения материальной точки?
3. Почему вращение Земли вокруг оси не влияет на равновесие тел на земной поверхности?
4. Что такое вес тела?
5. Как влияет вращение Земли на движение тел по земной поверхности и вблизи ее?

Тема 3. **Динамика механической системы**

3.1. Геометрия масс. Центр масс механической системы

Движение механической системы зависит не только от действующих на нее сил и ее массы, но и от того, как распределена масса системы, т. е. от геометрии масс.

Для характеристики распределения масс служат центр масс системы, осевые и центробежные моменты инерции твердых тел. На механическую систему (рис. 16), находящуюся в поле тяготения, действуют силы тяжести $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_k, \ldots \overline{G}_n$ всех материальных точек. Радиус-вектор $\overline{r}_c$ центра C этих параллельных сил (центра тяжести системы)

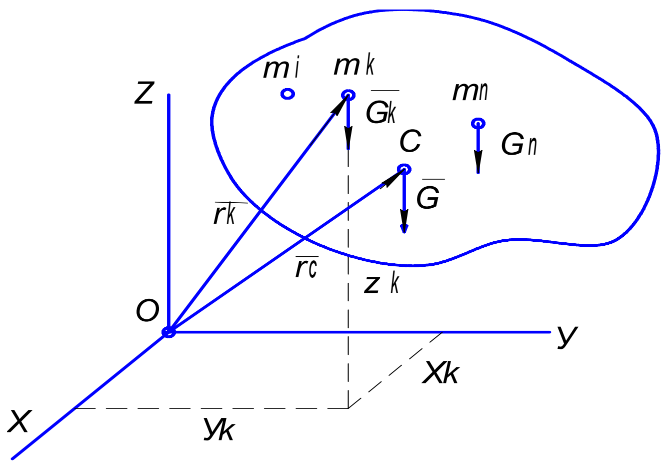


Рис. 16

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k g \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k g}. \qquad (3.1)$$

Сократив выражение (3.1) на *g,* получим формулу для радиуса-вектора центра масс

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \qquad (3.2)$$

Центр тяжести и центр масс системы представляют одну и ту же точку *C*. Понятие «центр масс системы» применимо для любой системы материальных точек независимо от того, находится она под действием сил тяжести или нет.

Центр масс системы – это геометрическая точка, радиус-вектор которой определяется по формуле (3.2), а ее координаты по формулам

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \qquad (3.3)$$

где m_k – масса каждой k -й точки (или тела);

x_k, y_k, z_k – координаты k *-й* точки или центра тяжести k -го тела, входящих в механическую систему;

$\sum_{k=1}^{n} m_k = M$ – масса всей системы.

3.2. Внутренние силы

Внутренние силы (i) – силы взаимодействия между материальными точками или телами, входящими в данную систему.

Одна и та же сила может являться как внешней, так и внутренней. Все зависит от того, какая механическая система рассматривается.

Например, в системе Солнце, Земля и Луна все силы тяготения между ними являются внутренними. При рассмотрении системы Земля и Луна силы тяготения, приложенные со стороны Солнца, – внешние.

На основании закона действия и противодействия каждой внутренней силе F_k соответствует другая внутренняя сила F_k, равная по модулю и противоположная по направлению.

Из этого следуют *два замечательных свойства внутренних сил:*

1) главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю:

$$\boxed{\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0;}$$

2) главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю:

$$\boxed{\bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_{kO}^i = 0.}$$

Вопросы для повторения

1. Что называется центром масс системы точек?
2. Как определяются координаты центра масс?
3. Перечислите свойства внутренних сил.

Тема 4. **Моменты инерции твердого тела**

4.1. Моменты инерции твердого тела относительно оси и полюса

Различают осевые, планарные и полярный моменты инерции твердого тела.

Осевые моменты инерции – скалярные величины, равные сумме произведений масс всех точек (системы) на квадраты расстояний их до соответствующих координатных осей.

Осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Возьмем в теле точку M_k (рис. 17) с координатами x_k, y_k, z_k и массой m_k. Тогда осевые моменты инерции

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k h_{kx}^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2 \right),$$

где h_{kx} – расстояние от точки M_k до оси . x.

Аналогично

$$I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(z_k^2 + x_k^2 \right); \quad I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right). \qquad (4.1)$$

Вычисление этих сумм в пределе сводится к вычислению определенных интегралов.

Момент инерции твердого тела относительно оси может определяться по формуле

$$I_z = Mi_z^2; \quad I_z \left[\text{кг} \cdot \text{м}^2 \right], \qquad (4.2)$$

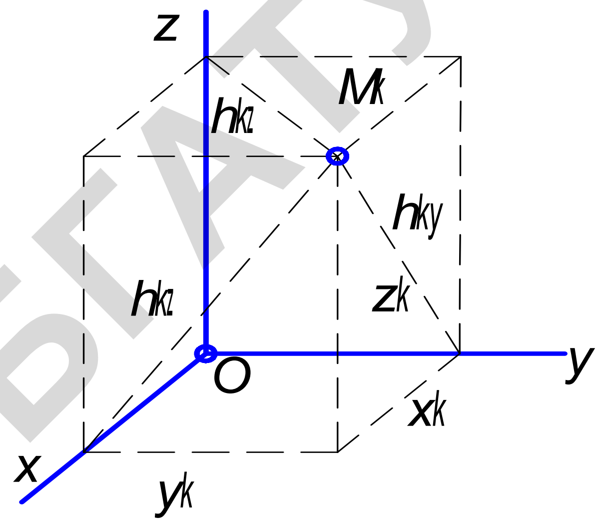


Рис. 17

где i_z — радиус инерции тела относительно оси — расстояние от оси z до такой точки тела, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Полярный момент инерции (момент инерции относительно начала координат)

$$I_o = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \right). \qquad (4.3)$$

Из (4.1) и (4.3) следует, что

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z. \qquad (4.4)$$

Осевые моменты инерции некоторых однородных тел

1. Тонкое кольцо.

Масса M распределена по внешней поверхности (рис. 18).

$$I_x = MR^2; \; I_y = I_z = \frac{MR^2}{2}.$$

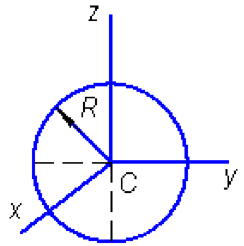


Рис. 18

2. Тонкие пластины.
Масса M равномерно распределена по сечению:
а) круглая пластина (диск) (рис. 19):

$$I_x = \frac{MR^2}{2};\ I_y = I_z = \frac{MR^2}{2}.$$

б) прямоугольная пластина (рис. 20):

$$I_y = \frac{mb^2}{12};\ I_z = \frac{ma^2}{12};\ I_x = \frac{m\left(a^2+b^2\right)}{12}.$$

в) круглая пластина с отверстием (рис. 21):

$$I_y = I_z = \frac{M\left(R^2+r^2\right)}{4};\ I_z = \frac{M\left(R^2+r^2\right)}{2}.$$

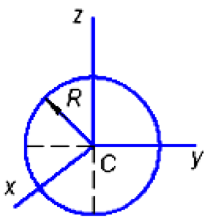


Рис. 19

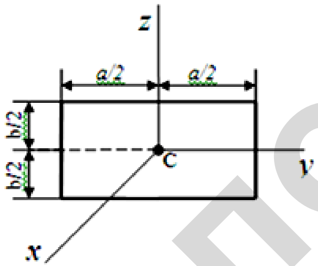


Рис. 20

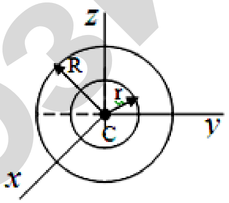


Рис. 21

3. Круговой цилиндр (рис. 22):

$$I_x = I_y \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12};\quad I_z = \frac{MR^2}{2}.$$

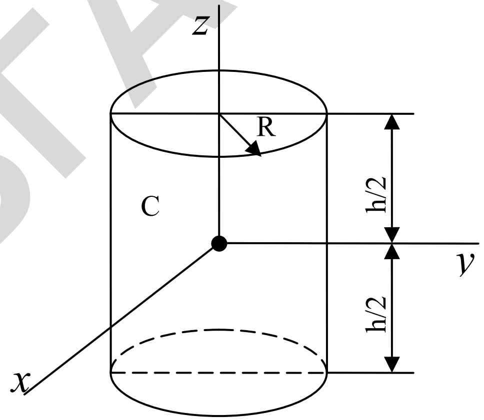


Рис. 22

4. Полый круговой цилиндр (рис. 23):

$$I_x = I_y \frac{M\left(R^2+r^2\right)}{4} + \frac{Mh^2}{12};\quad I_z = \frac{M\left(R^2+r^2\right)}{2}.$$

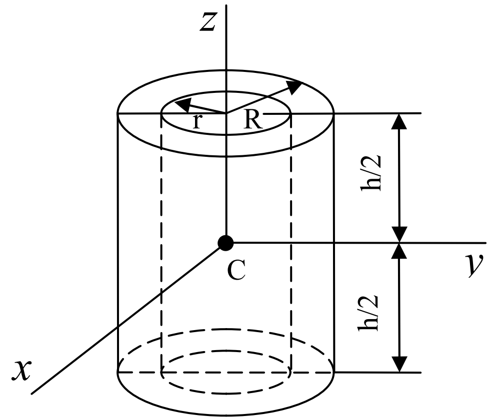


Рис. 23

5. Тонкий стержень (рис. 24):

$$I_x = I_z = \frac{Ml^2}{12}; \quad I_y = 0.$$

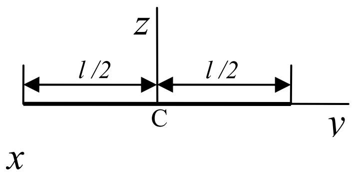


Рис. 24

6. Круговой конус (рис. 25):

$$I_x = I_y = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{80}Mh^2; \quad I_z = \frac{3}{10}MR^2.$$

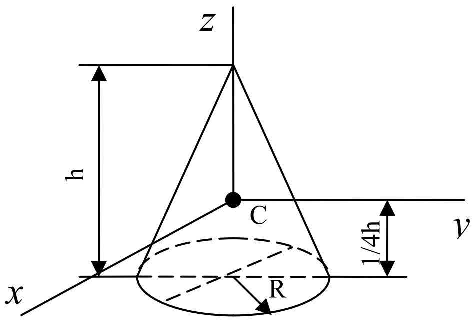


Рис. 25

7. Шар (рис. 26): $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2;$

$$I_c = \frac{3}{2}I_{oc} = \frac{3}{5}MR^2.$$

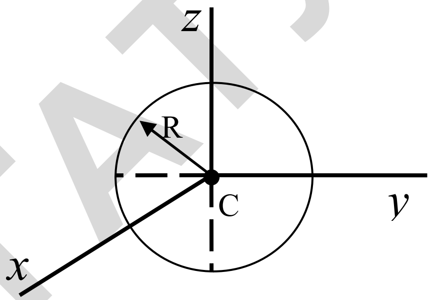


Рис. 26

4.2. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса – Штейнера)

Теорема.

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями.

Доказательство. Выберем в центре масс *C* тела начало координат осей *xyz*. Возьмем в теле точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ массы m_k. Проведем на расстоянии *d* от оси *z* ось z_1 (рис. 27). Тогда момент инерции относительно этой оси

$$I_{z1} = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[x_k^2 + (y_k - d)^2 \right] = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right) - 2\sum_{k=1}^{n} m_k y_k d + \sum_{k=1}^{n} m_k d^2,$$

где $\sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right) = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = I_{C_z}$ – момент инерции тела, относительно оси, проходящей через центр масс;

$$\sum_{k=1}^{n} m_k d^2 = d^2 \sum_{k=1}^{n} m_k = Md^2;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k y_k d = d\sum_{k=1}^{n} m_k y_k = dMy_C = 0,$$

т. к. $y_c = 0$ (начало координат взято в центре масс). Тогда

$$I_{z1} = I_{Cz} + Md^2. \qquad (4.5)$$

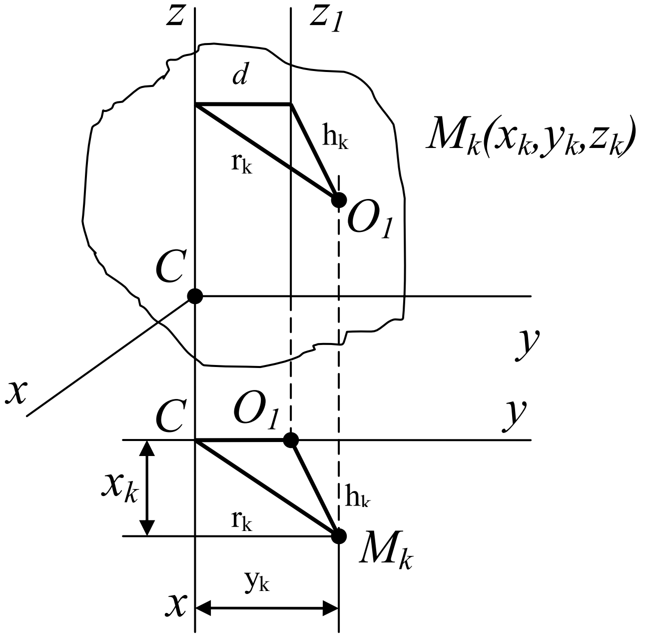


Рис. 27

Пример.

Вычислить момент инерции однородного стержня длины l и массы m относительно оси, проходящей через конец стержня.

Решение. Момент инерции стержня относительно оси C_z, проходящей через центр масс стержня,

$$I_{Cz} = \frac{ml^2}{12}.$$

Момент инерции стержня относительно параллельной оси, проходящей через конец стержня, по теореме Гюйгенса – Штейнера

$$I_{z1} = I_{Cz} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

4.3. Центробежные моменты инерции

Центробежные моменты инерции учитывают асимметрию в распределении масс, вычисляются относительно пары координатных осей по формулам

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k,\; I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k,\; I_{zy} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k y_k. \qquad (4.6)$$

В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Это зависит от выбора начала осей координат и их направления. Ось, относительно которой центробежные моменты инерции, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела. Главная ось инерции, проходящая через центр масс тела, называется главной центральной осью инерции. Главными осями инерции твердого тела являются его оси симметрии.

Зная осевые и центробежные моменты инерции тела, можно определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через начало координат и образующей с осями x, y и z соответственно углы α, β, γ по формуле

$$I_v = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ -2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \qquad (4.7)$$

Если оси координат являются главными осями инерции, то

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

Тогда

$$I_v = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma. \qquad (4.8)$$

Вопросы для повторения

1. Что называют моментом инерции твердого цела относительно плоскости, оси, точки?
2. Какую величину называют радиусом инерции тела относительно оси?
3. Что называется центробежным моментом инерции?
4. Какими свойствами обладают главные и главные центральные оси инерции?
5. Относительно какого полюса момент инерции данного тела имеет наименьшее значение?

Раздел 2. **Общие теоремы динамики материальной точки и механической системы**

Тема 5. **Теорема о движении центра масс системы**

Теорема.

Центр масс механической системы движется как любая материальная точка, масса которой равна массе всей механической системы и к которой приложена сила, равная главному вектору внешних сил.

Доказательство. Основное уравнение динамики для *k-ой* материальной точки (рис. 28)

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i .$$

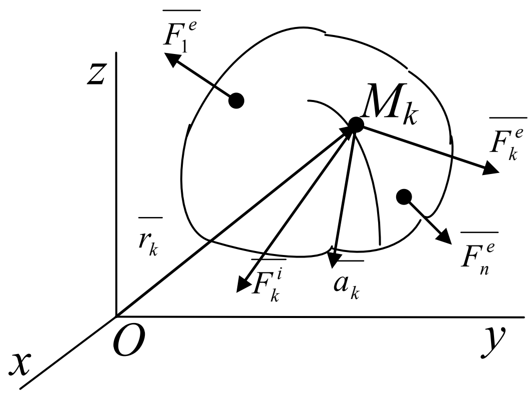


Рис. 28

Для всей механической системы

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i ,$$

где $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i = 0$ – по свойству внутренних сил; $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e = \overline{R}^e$ – главный вектор всех $\overline{F}_k^e$ внешних сил, приложенных к системе;

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{a}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(M \bar{r}_c\right) = M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = M \bar{a}_c .$$

С учетом этого (4.1) примет вид

$$M \bar{a}_c = \bar{R}^e . \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) может быть записано в скалярной форме в проекциях на оси декартовых координат или на естественные оси. В декартовых осях (5.2) имеет вид

$$M\ddot{x}_C = R_x^e = \sum F_{kx}^e ;\; M\ddot{y}_C = R_y^e = \sum F_{ky}^e ;$$

$$M\ddot{z}_C = R_y^e = \sum F_{kz}^e ;\; k = 1,\; ...,\; n. \tag{5.3}$$

Следствия из теоремы.

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то центр масс механической системы движется равномерно и прямолинейно, либо покоится.

2. Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось равна нулю, то проекция центра масс на эту ось либо покоится, либо движется равномерно, т. е., например, если $\bar{R}_x^e = 0$, то $\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = \text{const}$.

Если в начальный момент система покоилась, то $\dot{x}_{0_C} = 0 = \dot{x}_C \Rightarrow x_C = \text{const}$ – проекция центра масс покоится. При $\dot{x}_{0_C} \neq 0$ центр масс будет двигаться вдоль оси x с постоянной скоростью.

Эти следствия выражают закон сохранения движения центра масс механической системы. При $x_C = \text{const}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = 0, \tag{5.4}$$

где Δx_k – приращение координаты центра масс k-го тела при изменении положения тел в механической системе, равное проекции абсолютного перемещения этой точки на ось x.

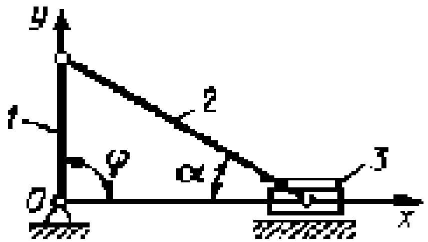
Вопросы для повторения

1. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы.
2. Какое движение твердого тела можно рассматривать как движение материальной точки, имеющей массу данного тела, и почему?
3. Приведите примеры, иллюстрирующие теорему о движении центра масс механической системы.
4. При каких условиях центр масс механической системы не перемещается вдоль некоторой оси?

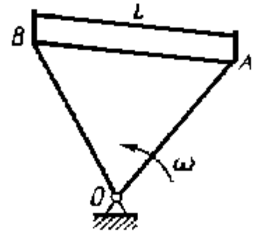
Задачи для самостоятельного решения

1. Положение центра масс C механической системы массой $m = 50$ кг определяется радиусом-вектором $\vec{r}_c = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Определить статический момент масс этой системы относительно плоскости Oxy .

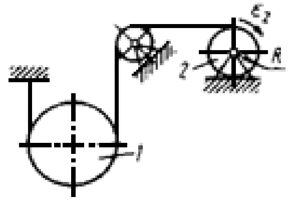
2. Определить координату x_c центра масс кривошипно-ползунного механизма при углах $\varphi = 90^\circ$ и $\alpha = 30^\circ$, если масса кривошипа *1* равна 4 кг , а масса шатуна 2 равна 8 кг . Шатун *2* длиной 0,8 м считать однородным стержнем. Массой ползуна *3* пренебречь.



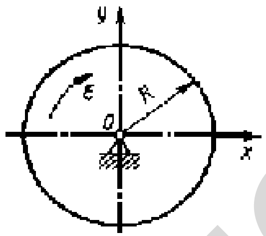
3. Однородный равносторонний треугольник ΔOAB массой $m = 5$ кг вращается равномерно вокруг неподвижной оси. Определить его угловую скорость ω, если главный вектор внешних сил, действующих на него, равен $300\ H$, а длина $l = 0,4$ м .



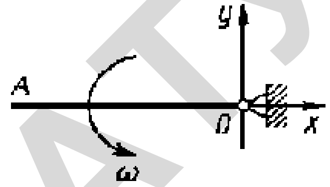
4. Шкив *2* радиуса $R = 0,2$ м, вращаясь с угловым ускорением $\varepsilon = 10$ рад/с^2, поднимает однородный цилиндр *1*, масса которого $m = 50$ кг. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на цилиндр.



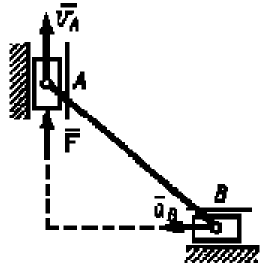
5. Однородный диск радиуса $R = 0,5$ м, масса которого $m = 20$ кг, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 10$ рад/с^2. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на диск.



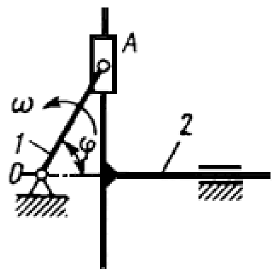
6. Однородный стержень OA массой $m = 10$ кг вращается равномерно с угловой скоростью ω=10 рад/с. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на стержень, если его длина $OM = 1$ м.



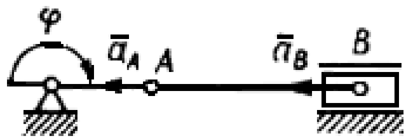
7. Ползун A движется под действием силы $\vec{F}$ с постоянной скоростью $\vec{\vartheta}_A$. Определить реакцию направляющей на ползун A в тот момент времени, когда ускорение ползуна B равно $a_B = 4$ м/с^2, если масса однородного стержня $\grave{A}B$ равна 5 кг. Массой ползунов пренебречь.



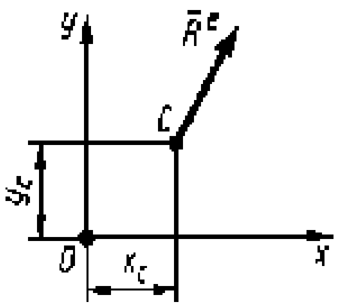
8. Кривошип *1* длиной $AB = 0,25$ м, вращаясь равномерно с угловой скоростью ω=10 рад/с, приводит в движение кулису *2*, масса которой $m = 5$ кг. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на кулису в момент времени, когда угол $\varphi = 60^{\circ}$.



9. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на шатун $\grave{A}B$ кривошипно-ползунного механизма в момент времени, когда угол $\varphi = 180^{\circ}$, а точки $\grave{A}$ и B имеют ускорения $a_A = 10$ м/с^2, $a_B = 14$ м/с^2. Шатун массой $m = 5$ кг считать однородным стержнем.



10. Определить проекцию ускорения центра масс C механической системы на ось Oy в момент времени, когда координата $y_C = 0{,}8$ м, если масса системы $m = 10$ кг, а главный вектор приложенных внешних сил $\vec{R}^e = 3\vec{i} + 6t\vec{j}$. В начальный момент времени центр масс системы находится в точке O в покое.



Тема 6. **Количество движения материальной точки и механической системы**

6.1. Количество движения материальной точки

Количество движения материальной точки – векторная мера ее движения, равная произведению массы точки на вектор ее скорости (рис. 29):

$$\bar{q} = m\bar{\vartheta}. \qquad (6.1)$$

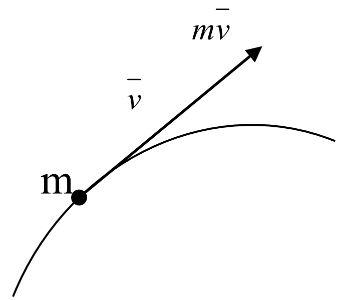


Рис. 29

Количество движения механической системы или главный вектор количества движения – геометрическая сумма количества движения всех материальных точек системы (рис. 30):

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{\vartheta}_k . \qquad (6.2)$$

Преобразуем (6.2):

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=n}^{n} m_k \bar{r}_k\right) = \frac{d}{dt}\left(M\bar{r}_c\right) = M\frac{d\bar{r}_c}{dt} = M\overline{\vartheta_c}, \qquad (6.3)$$

где $\overline{\vartheta_c}$ – скорость центра масс.

Если механическая система состоит из твердых тел, то по формуле (6.3) определяется количество движения каждого k -го тела, а затем

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_k = \sum_{k=1}^{n} M_k \overline{\vartheta c}_k, \tag{6.4}$$

где $\overline{\vartheta c}_k$ — скорость центра масс k-го тела.

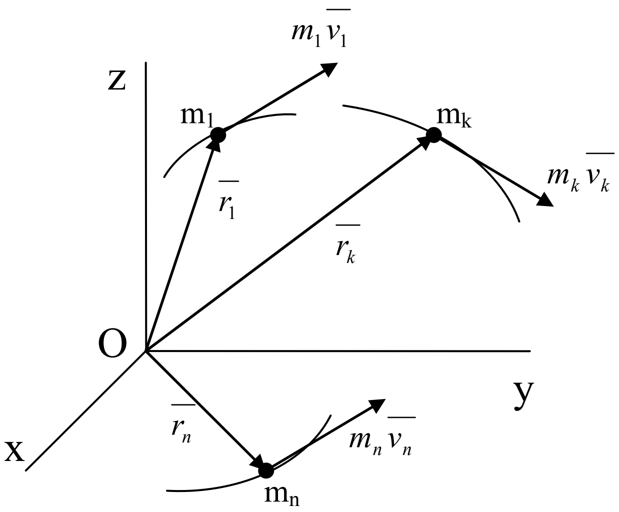


Рис. 30

Модуль главного вектора количества движения системы определяется через его проекции на оси декартовых координат

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} Q_{kx}; \quad Q_y = \sum_{k=1}^{n} Q_{ky}; \quad Q_z = \sum_{k=1}^{n} Q_{kz};$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}. \tag{6.5}$$

Например, определить количество движения системы:

1. Вращение тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс (рис. 31).

Так как $\vartheta c = 0$, то $Q = 0$.

2. Качение тела по плоскости – плоскопараллельное движение – поступательное вместе с центром масс $Q = \text{const} = M\vartheta c$ и вращательное относительно оси, проходящей через центр масс – $Q_{\text{вр}} = 0$ (рис. 32). Итак,

$$Q = M\vartheta c. \tag{6.6}$$

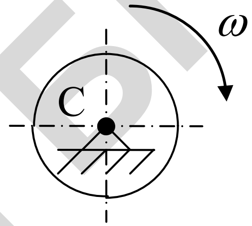


Рис. 31

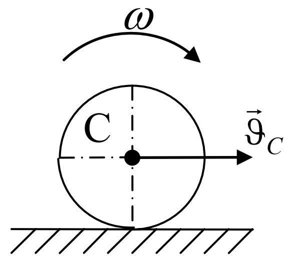


Рис. 32

6.2. Импульс силы

Импульс силы – векторная мера действия силы в течение некоторого времени.

Элементарный импульс $d\overline{S}$ силы – векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени dt, т. е.

$$d\overline{S} = \overline{F} \cdot dt. \tag{6.7}$$

Импульс $\overline{S}$ силы $\overline{F}$ за конечный промежуток времени t равен интегральной сумме соответствующих элементарных импульсов, т. е.

$$\overline{S} = \int_0^t \overline{F} dt. \tag{6.8}$$

Выражение (6.8) в проекциях на оси декартовых координат:

$$\overline{S}_x = \int_0^t \overline{F}_x dt; \quad \overline{S}_y = \int_0^t \overline{F}_y dt; \quad \overline{S}_z = \int_0^t \overline{F}_z dt.$$

6.3. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Теорема в дифференциальной форме.

Производная по времени от количества движения материальной точки равна геометрической сумме сил, действующих на точку (рис. 33).

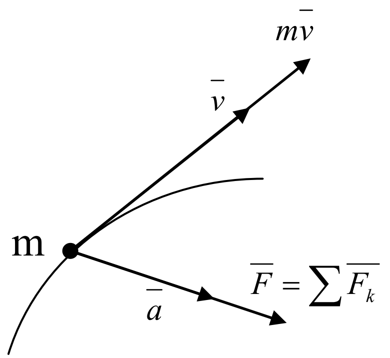


Рис. 33

Доказательство. Запишем основной закон динамики в виде

$$m\bar{a} = \sum F_k;$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt};$$

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\bar{\vartheta}\right) \Rightarrow \frac{d\bar{q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k. \qquad (6.9)$$

Теорема в интегральной (конечной) форме.

Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени.

Доказательство.

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\bar{\vartheta}\right) = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \Rightarrow \int_{V_0}^{V} d\left(m\bar{\vartheta}\right) = \sum \int_0^t \bar{F}_k\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\bar{\vartheta} - m\bar{\vartheta}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k. \qquad (6.10)$$

Векторные равенства (6.9) и (6.10) можно записать в проекциях на оси декартовых координат:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \rightarrow \frac{d\bar{q}_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \rightarrow \frac{d\bar{q}_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \qquad (6.11)$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \rightarrow \frac{d\bar{q}_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}.$$

При решении задач уравнения (6.11) следует применять в тех случаях, когда на точку кроме постоянных сил действуют переменные силы, зависящие от скорости точки.

6.4. Теорема об изменении главного вектора количества движения механической системы

Теорема в дифференциальной форме.

Производная по времени от главного вектора количества движения механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на эту систему.

Доказательство. На любую *k*-ю точку механической системы действуют силы $\bar{F}_k^e$ и $\bar{F}_k^i$. Для этой точки в соответствии с (6.9)

$$\frac{d\bar{q}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i. \qquad (6.12)$$

Для всей системы

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\overline{q}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i \Rightarrow \frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^e, \qquad (6.13)$$

где $\sum \frac{d\overline{q}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} q_k\right) = \frac{d\overline{Q}}{dt}; \quad \sum \overline{F}_k^e = \overline{R}^e;$

$\sum \overline{F}_k^i = 0; \; k = 1, ..., n.$

В проекциях на оси декартовых координат (6.13) имеет вид

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e; \qquad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e; \qquad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e. \qquad (6.14)$$

Следствия из теоремы.

1. Если $\overline{R}^e = 0$, то $\overline{Q} = \overline{\text{const}}$.

2. Если проекция главного вектора на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось есть величина постоянная. Например, $R_x^e = 0$, то $Q_x = \text{const}$.

Теорема в интегральной (конечной) форме.

Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех внешних сил, действующих на точки механической системы, за тот же промежуток времени.

Доказательство.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{kx}^e \Rightarrow d\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e dt \Rightarrow \int_{K_1}^{K_2} d\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}_k^e dt \Rightarrow$$

$$\overline{Q}_2 - \overline{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^e, \qquad (6.15)$$

где $\sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^e = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_2}^{t_2} \overline{F}_k^e dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e\right) dt = \int_{t_2}^{t_2} \overline{R}^e dt = \overline{S}^e$ – импульс главного вектора внешних сил.

Векторному равенству (6.15) соответствуют три равенства в скалярной форме:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = S_x^e; \qquad Q_{2y} - Q_{1y} = S_y^e; \qquad Q_{2z} - Q_{1z} = S_z^e. \qquad (6.16)$$

Следствия из теоремы.

1. Если $\overline{S}^e = 0$, **то** $\overline{Q}_2 = \overline{Q}_1 = \overline{Q} = \overline{\text{const}}$.

2. Если $\overline{S}_x^e = 0$, **то** $\overline{Q}_{2x} = \overline{Q}_{1x} = \overline{Q} = \text{const}$.

Вопросы для повторения

1. Что характеризует импульс силы?

2. Чему равен импульс равнодействующей силы?

3. Как изменяется количество движения точки, движущейся равномерно по окружности?

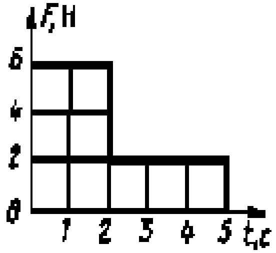
4. Сформулируйте теорему об изменении количества движения материальной точки и механической системы в дифференциальной и конечной формах.

Задачи для самостоятельного решения

1. Постоянная по модулю и направлению сила действует на тело в течение $t = 10$ с. Найти модуль ее импульса за это время, если проекции силы на оси координат $F_x = 3$ Н, $F_y = 4$ Н.

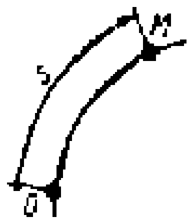
2. Модуль постоянной по направлению силы изменяется по закону $F = 5 + 9t^2$ Н. Найти модуль импульса этой силы за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$, где $t_1 = 0$, $t_1 = 2$ с.

3.



Модуль постоянной по направлению силы изменяется по закону, показанному на рисунке. Определить модуль этой силы за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$, где $t_1 = 5$ с, $t_1 = 0$.

4.

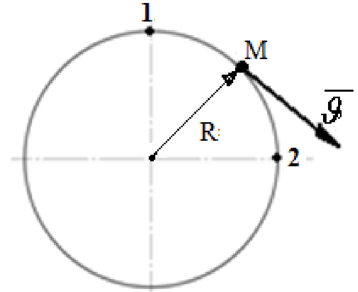


Материальная точка массой $m = 0,5$ кг движется по закону $s = 2 + 0,5e^{2t}$ м. Определить модуль количества движения точки в момент времени $t = 1$ с.

5. Материальная точка массой $m = 0,5$ кг движется согласно векторному уравнению $\vec{r} = 2\sin\pi t\vec{i} + 3\cos\pi t\vec{j}$. Определить проекцию количества движения точки на ось Ox в момент времени $t = 0,5$ с.

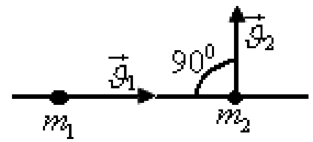
6. Материальная точка массой $m = 0,5$ кг движется по прямой. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующей на точку за первые $t = 2$ с, если она движется по закону $s = 4t^2$ м.

7. Материальная точка M массой $m = 1$ кг равномерно движется по окружности со скоростью $\vartheta = 4$ м/с. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующих на эту точку за время ее движения из положения 1 в положение 2.

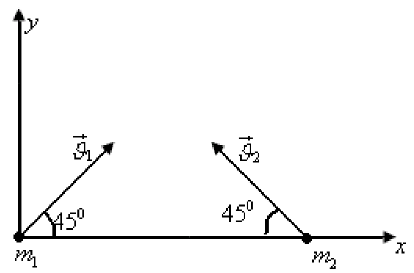


8. Количество движения материальной точки M изменяется по закону $m\vec{\vartheta} = 5\vec{i} + 23\vec{j}$. Определить проекцию на ось Oy равнодействующей сил, приложенных к точке.

9.



Определить модуль главного вектора количества движения системы двух материальных точек, массы которых $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, в момент времени, когда скорости $\vartheta_1 = 3$ м/с, $\vartheta_2 = 2$ м/с.



Определить проекцию на ось *Ox* главного вектора количества движения системы двух материальных точек, массы которых $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, в момент времени, когда их скорости $\vartheta_1 = 2$ м/с, $\vartheta_2 = 1$ м/с.

Тема 7. **Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси**

7.1. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси

1. Алгебраический момент количества движения относительно центра (рис. 34):

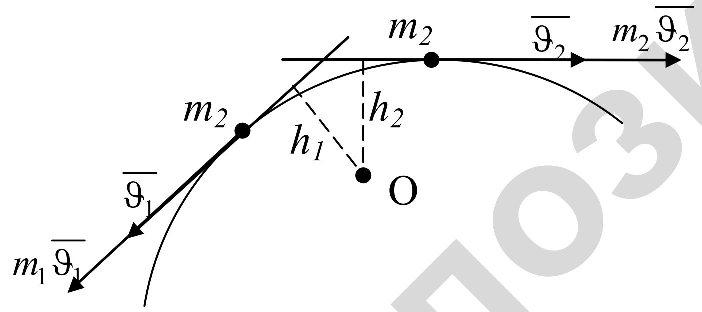


Рис. 34

$$mom_O\left(m_1\overline{\vartheta}_1\right) = m_1\vartheta_1 h_1 = l_{1O};$$
$$mom_O\left(m_2\overline{\vartheta}_2\right) = -m_2\vartheta_2 h_2 = l_{2O}.$$

Правило знаков: $+l_O$ – при движении точки против хода часовой стрелки; $-l_O$ – то же по ходу часовой стрелки.

Алгебраический момент количества движения материальной точки относительно некоторого центра *O* – скалярная величина, взятая со знаком (+) или (-) и равная произведению модуля количества движения $m\overline{\vartheta}$ на расстояние h (перпендикуляр) от этого центра до линии, вдоль которой направлен вектор $m\overline{\vartheta}$:

$$l_O = \pm m\vartheta h. \tag{7.1}$$

2. *Векторный* момент количества движения относительно центра (рис. 35).

Векторный момент количества движения материальной точки относительно некоторого центра *O* – вектор, приложенный в этом центре и направленный перпендикулярно плоскости векторов $m\overline{\vartheta}$ и $\overline{r}$ в ту сторону, откуда движение точки видно против хода часовой стрелки.

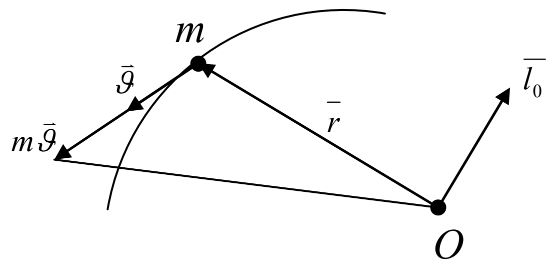


Рис. 35

Это определение удовлетворяет векторному равенству

$$\overline{l}_O = \overline{r}\cdot m\overline{\vartheta}. \tag{7.2}$$

3. *Моментом количества движения* материальной точки относительно некоторой оси z называется скалярная величина l_z, взятая со знаком (+) или (-) и равная произведению модуля $m\bar{\vartheta}_{xy}$ проекции вектора $m\bar{\bar{\vartheta}}$ количества движения на плоскость, перпендикулярную этой оси, на перпендикуляр *h*, опущенный из точки пересечения оси с плоскостью на линию, вдоль которой направлена указанная проекция (рис. 36, *а*):

$$l_x = \pm m\vartheta_{xy} h \,. \tag{7.3}$$

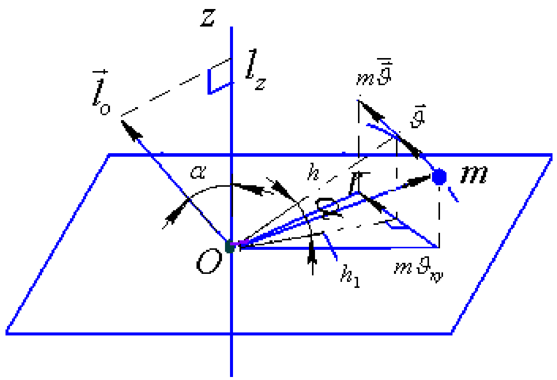
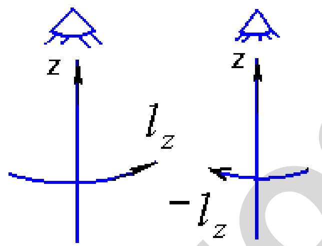


Рис. 36



а *б*

Рис. 37

Правило знаков: смотрим навстречу оси z (рис. 37, *а*). Кинетический момент положительный ($+l_z$) – при движении точки против хода часовой стрелки. Кинетический момент отрицательный ($-l_z$) – если направлен по ходу часовой стрелки (рис. 36, *б*).

Кинетический момент механической системы относительно центра и оси

1. *Кинетический момент относительно центра.*

Запишем выражение, определяющее кинетический момент относительно центра для *k*-ой точки системы $\vec{l}_{kO} = \vec{r}_k \cdot m_k \overline{\vartheta_k}$ – векторный момент. Для всей системы (рис. 38)

$$\vec{L}_O = \sum_k \vec{l}_{ko} \tag{7.4}$$

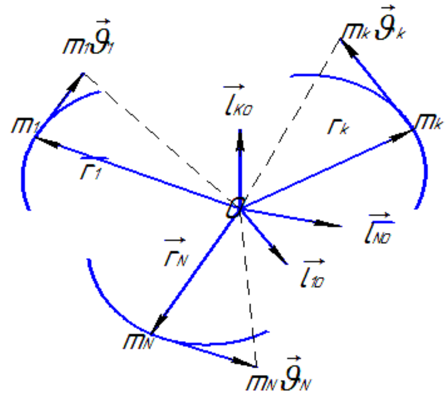


Рис. 38

Кинетическим моментом или главным моментом количеств движения механической системы относительно некоторого центра называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно того же центра.

2. *Кинетический момент относительно оси.*

Для *k*-ой точки $l_k = l_{ko} \cos\alpha_k$ – алгебраическая величина (рис. 39). Для всей системы

$$L_z = \sum_k l_{kz} \,. \tag{7.5}$$

Кинетическим моментом или главным моментом количеств движения механической системы относительно некоторой оси называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно той же оси.

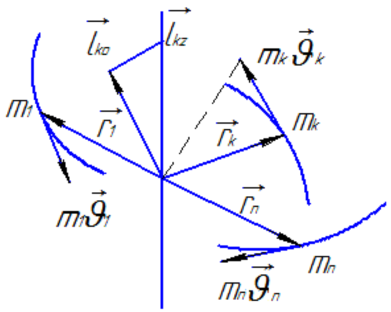


Рис. 39

3. *Кинетический момент твердого тела,* вращающегося вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω (рис. 40).

Для k-ой точки тела

$$l_{kz} = m_k \vartheta_k r_k; \quad \vartheta_k = \omega r_k \Rightarrow l_{kz} = m_k \omega r^2{}_k.$$

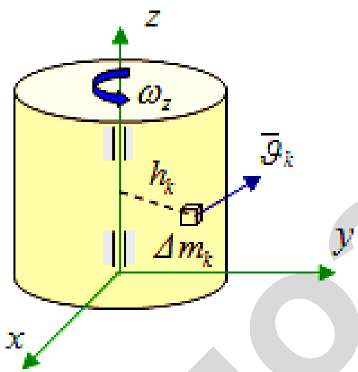


Рис. 40

Для всего тела, состоящего из n точек,

$$L_z = \sum_k l_{kz} = \sum_k m_k \omega r_k^2 = \omega \sum_k m_k r_k^2 = I_z \omega,$$

где $I_z = \sum_k m_k r_k^2$ – момент инерции тела относительно оси.

Итак,

$$L_z = I_z \omega. \qquad (7.6)$$

7.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и оси

Теорема моментов относительно центра.

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна моменту силы, действующей на точку, относительно того же центра.

Доказательство (рис. 41).

Пусть $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$; $\vec{l}_O = \bar{r} \cdot m\bar{\vartheta}$; $\vec{M}_O(\vec{F}) = \bar{r} \cdot \bar{F}$ – момент силы относительно центра O.

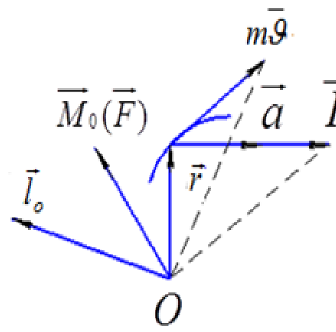


Рис. 41

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot m\bar{\vartheta} + \vec{r} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{\vartheta}) =$$

$$= \vec{\vartheta} \cdot m\vec{\vartheta} + \vec{r} \cdot \vec{F};$$

$$|\,\vec{\vartheta} \cdot m\vec{\vartheta}\,| = |\,\vec{\vartheta}\,| \cdot |\,m\vec{\vartheta}\,| \sin 0 = 0.$$

Итак,

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F}). \qquad (7.7)$$

Следствие. Если линия действия равнодействующей приложенных к точке сил все время проходит через неподвижный центр, то момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным.

П р и м е ч а н и е . Такая сила называется центральной.

Например, рассмотрим движение спутника вокруг Земли (рис. 42). $\vec{F}$ – сила притяжения, ее модуль зависит от расстояния между Землей и спутником. Так как $\vec{M}_o(\vec{F}) = 0$, то

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F})\ l_o = \text{const} \Rightarrow m\vartheta_1 r_1 = m\vartheta_2 r_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (7.8)$$

– обратная зависимость между скоростями и расстояниями.

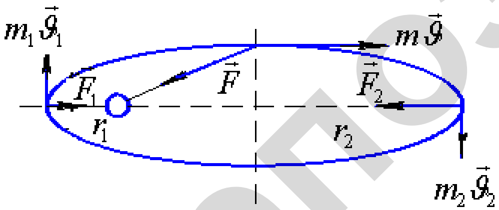


Рис. 42

Теорема моментов относительно оси.

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой оси равна моменту силы, действующей на точку, относительно той же оси.

Доказательство. Запишем (7.7) в проекциях на оси декартовых координат, учитывая, что

$$l_{ox} = l_x;\ \ l_{oy} = l_y;\ \ l_{oz} = l_z;$$

$$M_{ox}(\vec{F}) = M_x(\vec{F});\ M_{oy}(\vec{F}) = M_y(\vec{F});\ M_{oz}(\vec{F}) = M_z(\vec{F}).$$

Тогда

$$\frac{dl_x}{dt} = M_x(\vec{F}),\ \frac{dl_y}{dt} = M_y(\vec{F}),\ \frac{dl_z}{dt} = M_z(\vec{F}), \qquad (7.9)$$

где l_x, l_y, l_z – моменты количества движения материальной точки относительно осей координат; $M_x(\vec{F}); M_y(\vec{F}); M_z(\vec{F})$ – моменты силы относительно тех же осей.

Следствие. Если момент равнодействующей сил, действующих на материальную точку, относительно некоторой оси равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно той же оси остается величиной постоянной.

7.3. Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси

Теорема моментов относительно центра.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра.

Доказательство. Для *k*-ой точки системы

$$\frac{d\vec{l}_{ok}}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_o(\vec{F}_k^i).$$

Выполняя суммирование по всем точкам системы, получим

$$\sum \frac{d\vec{l}_{ok}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{l}_{ok}\right) = \frac{d\vec{L}_o}{dt},$$

где $\vec{L}_O = \sum\limits_k \vec{l}_{ko}$;

$\sum \vec{M}_o(\vec{F}_k^e) = \vec{M}_o^e$ – главный момент внешних сил относительно центра O;

$\sum \vec{M}_o(\vec{F}_k^i) = \vec{M}_o^i = 0$ – по свойству внутренних сил.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^e = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_k^e). \qquad (7.10)$$

Следствие. Если главный момент внешних сил относительно некоторого центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра не изменяется (закон сохранения кинетического момента).

Теорема моментов относительно оси.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой неподвижной оси равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой оси.

Доказательство. Спроектируем векторное равенство (7.10) на оси декартовых координат. Получим

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e = \sum M_x(\vec{F}_k^e);$$

$$\frac{dL_y}{dt} = M_y^e = \sum M_y(\vec{F}_k^e);$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e = \sum M_z(\vec{F}_k^e),$$

где L_x, L_y, L_z – кинетические моменты механической системы относительно осей координат; M_x^e, M_y^e, M_z^e – главные моменты внешних сил относительно осей координат.

Следствие. Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси не изменяется.

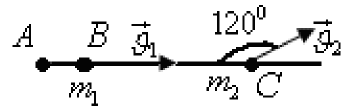
Вопросы для проверки

1. Как определяются моменты количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси?
2. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси.
3. Что называется кинетическим моментом механической системы относительно центра и относительно оси?
4. Сформулируйте теорему об изменении кинетического механической системы относительно центра и относительно оси.

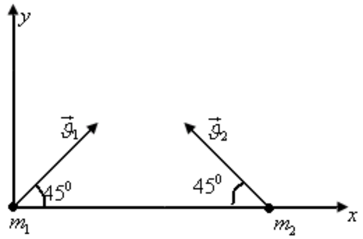
Задачи для самостоятельно решения

1. Определить момент количества движения материальной точки массой m =1 кг относительно начала координат а положении, когда ее координаты $x = y = 1$ м и проекции скорости $\vartheta_x = \vartheta_y = 1$ м/с .

2. Определить моменты количеств движений материальных точек относительно центра A, массы которых $m_1 = 4$ кг , $m_2 = 2$ кг , в момент времени, когда их скорости $\vartheta_1 = 2$ м/с , $\vartheta_2 = 1$ м/с , AB = 2 м, BC = 8 м.

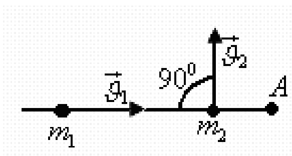


3.

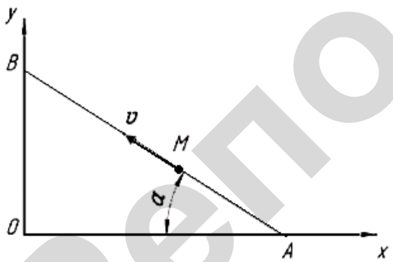


Определить главный момент количеств движений материальных точек относительно оси *Oz,* массы которых $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, в момент времени, когда их скорости $\vartheta_1 = 2$ м/с, $\vartheta_2 = 1$ м/с.

4. Определить моменты количеств движений материальных точек относительно центра *A*, массы которых $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, в момент времени, когда их скорости $\vartheta_1 = 2$ м/с, $\vartheta_2 = 1$ м/с, $m_1m_2 = 4$ м, $m_2A = 2$ м.

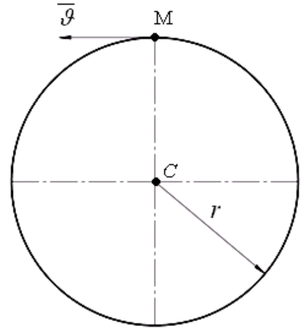


5. Материальная точка массой *m* = 0,5 кг движется со скоростью $\vartheta =$ 4 м/с по прямой *AB*. Определить момент количества движения точки относительно начала координат, если расстояние *OA*= *1* м и угол $\alpha = 30^\circ$.

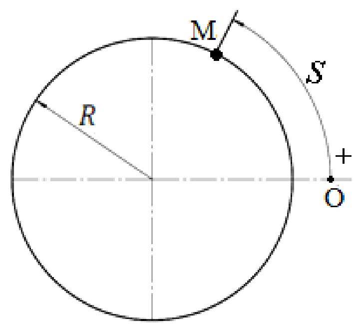


6. Материальная точка массой *m* = 0,5 кг движется по оси *Oy* согласно уравнению $y = 5t^2$. Определить момент количества движения этой точки относительно центра *O* в момент времени *t* = 2 с.

7. Материальная точка *M* массой *m* = 1 кг движется равномерно по окружности со скоростью $\vartheta =$ 4 м/с. Определить момент количества движения этой точки относительно центра *C* окружности радиуса *r* = 0,5 м.



8. Движение материальной точки *M* массой *m* = 0,5 кг происходит по окружности радиуса *r* = 0,5 м согласно уравнению *s* = 0,5t^2. Определить момент количества движения этой точки относительно центра окружности в момент времени *t* = 1 с.



Тема 8. **Работа и мощность сил**

Работа силы – скалярная мера действия силы.

1. *Элементарная* работа силы.

Элементарная работа силы – это бесконечно малая скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечного малого перемещения точки приложения силы (рис. 43):

$$dA = \overline{F} d\overline{r}. \tag{8.1}$$

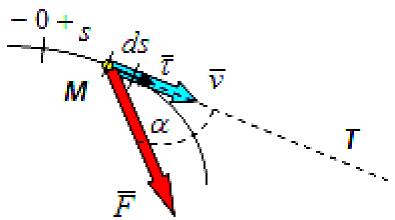


Рис. 43

В (8.1) $d\overline{r}$ – приращение радиуса-вектора $\overline{r}$ точки приложения силы, годографом которого является траектория этой точки. Элементарное перемещение $d\overline{s}$ точки по траектории совпадает с $d\overline{r}$ в силу их малости. Поэтому

$$dA = \overline{F} d\overline{s} = F \cdot ds \cos\left(\widehat{\overline{F}, d\overline{s}}\right). \tag{8.2}$$

Так как $F \cdot ds \cos\left(\widehat{\overline{F}, d\overline{s}}\right)$ – проекция силы на направление перемещения точки (при криволинейной траектории – на касательную ось τ к траектории), то

$$dA = F_\tau ds, \tag{8.3}$$

т. е. работу совершает только касательная сила, а работа нормальной силы равна нулю. Из (8.2) следует:

если $\left(\widehat{\overline{F}, ds}\right) < \dfrac{\pi}{2}$, то $dA < 0$;

если $\left(\widehat{\overline{F}, ds}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, то $dA = 0$;

если $\left(\widehat{\overline{F}, ds}\right) > \dfrac{\pi}{2}$, то $dA > 0$.

2. *Аналитическое в*ыражение элементарной работы.

Представим векторы $\overline{F}$ и $\overline{dr}$ через их проекции на оси декартовых координат:

$$\overline{F} = \overline{i}F_x + \overline{j}F_y + \overline{k}F_k, \quad d\overline{r} = \overline{i}dx + \overline{j}dy + \overline{k}dz$$

и подставим в (8.1).

Получим

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_k dz. \tag{8.4}$$

3. *Работа силы* на конечном перемещении равна интегральной сумме элементарных работ на этом перемещении

$$A_{12} = \int\limits_{M_1 M_2} F ds \cos\left(\widehat{\overline{F}, d\overline{s}}\right) = \int\limits_{M_1 M_2} F_\tau ds, \tag{8.5}$$

или

$$A_{12} = \int\limits_{M_1 M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_k dz\right). \tag{8.6}$$

Если сила постоянная, а точка ее приложения перемещается прямолинейно, то

$$A_{12} = Fs \cos\left(\widehat{\overline{F}, \overline{s}}\right). \tag{8.7}$$

Например, дано: F= 20 Н, s = 0,5 м, α = 30°.

$$A = Fs \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,66 \ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

4. *Работа силы тяжести* (рис. 44).

Используем формулу (8.6):

$$F_x = F_y = 0;\ \ F_z = -G = -mg\ ;$$

$$A_{12} = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) = mgh,$$

где h – перемещение точки приложения силы по вертикали вниз (высота).

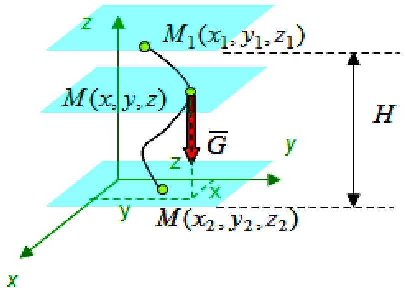


Рис. 44

При перемещении точки приложения силы тяжести вверх $A_{12} = -mgh$ (точка M_1 – внизу, M_2 – вверху). Итак,

$$A(m\overline{g}) = \pm mgh\ . \qquad (8.8)$$

Работа силы тяжести не зависит от формы траектории. При движении по замкнутой траектории (M_2 совпадает с M_1) работа равна нулю.

5. *Работа силы упругости* пружины.

Пружина растягивается только вдоль оси x (рис. 45).

Используем (8.6): $F_x = F_y = 0;\ \ F_z = -F_{\text{упр}} = -cx;$

$$A_{12} = \int_0^{\lambda} F_x dx = \int_0^{\lambda} -cx dx = -\frac{c\lambda^2}{2},$$

где λ — величина деформации пружины.

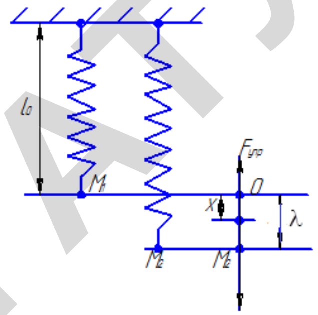


Рис. 45

При перемещении точки приложения силы $\overline{F}_{упр}$ из нижнего положения в верхнее направление силы и направление перемещения совпадают, тогда $A_{12} = \frac{c\lambda^2}{2}$.

Поэтому работа силы упругости

$$A_{12} = \pm\frac{c\lambda^2}{2}. \qquad (8.8)$$

При перемещении точки приложения силы упругости по криволинейной траектории из положения M_1 в положение M_2 (рис. 46) работа определяется по формуле (8.9)

$$A_{12} = -\frac{c}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), \qquad (8.9)$$

где λ_1 и λ_2 – деформации пружины в этих положениях.

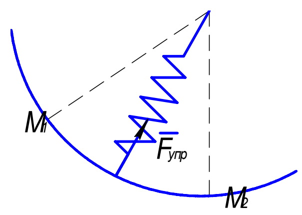


Рис. 46

6. *Работа сил, приложенных к твердому телу.*

а) Работа внутренних сил

Для двух k-х точек: $dA_k^i = F_{12}^i ds_1 \cos\alpha + F_{21}^i ds_2 \cos\beta$, т. к. $\overline{F}_{12}^i = -\overline{F}_{21}^i$ и $ds_1 \cos\alpha = ds_2 \cos\beta$ (доказывается в кинематике) (рис. 47).

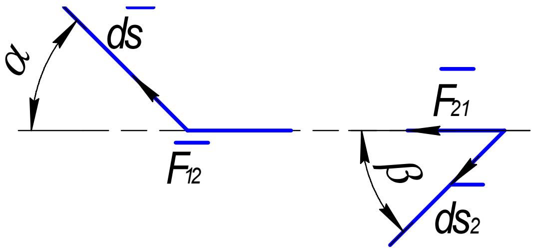


Рис. 47

Элементарная работа всех внутренних сил в твердом теле *равна нулю:*

$$dA^i = \sum_{k=1}^{n} dA_k^i = 0. \qquad (8.10)$$

Следовательно, на любом конечном перемещении тела

$$A^i = \sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0. \qquad (8.11)$$

Это верно только для неизменяемых механических систем.

б) Работа внешних сил.

Поступательное движение тела (рис. 48).

Элементарная работа k-й силы

$$dA_k^e = \overline{F}_k^e \cdot d\overline{s}_k = F_k^e \cdot ds \cos\left(\widehat{F_k, ds_k}\right).$$

Для всех сил

$$dA^e = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e = \sum_{k=1}^{n} F_k^e ds \cos\left(\widehat{F_k^e, d\overline{s}_k}\right).$$

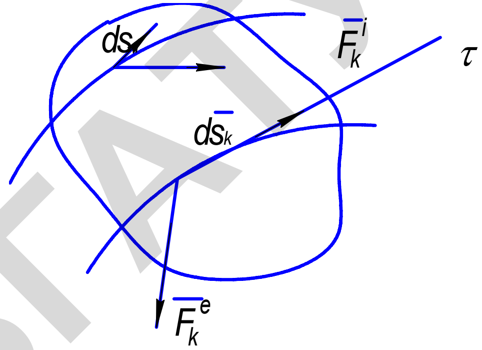


Рис. 48

Так как при поступательном движении $d\overline{s}_1 = d\overline{s}_2 = ... = d\overline{s}_k = d\overline{s}$, то

$$dA^e = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e = \sum_{k=1}^{n}\left[F_k^e \cos\left(\widehat{F_k^e, d\overline{s}_k}\right)\right] ds = R_e^\tau ds, \qquad (8.12)$$

где $R_e^\tau = \sum_{k=1}^{n} F_k^e \cos\left(\widehat{F_k^e, d\overline{s}_k}\right)$ – проекция главного вектора внешних сил на направление перемещения.

Работа сил на конечном перемещении

$$A^e = \int_s R_e^\tau ds. \qquad (8.13)$$

Вращение тела вокруг неподвижной оси (рис. 49). Элементарная работа k-й силы

$$dA_k^e = \overline{F}_k^e d\overline{s}_k = \left(\overline{F}_{k_\tau}^e + \overline{F}_{k_n}^e + \overline{F}_{k_b}^e\right) d\overline{s}_k,$$

где $\overline{F}_{k_\tau}^e, \overline{F}_{k_n}^e, \overline{F}_{k_b}^e$ – составляющие силы $\overline{F}_k^e$ по естественным осям τ, n, b (см. рис. 48).

Так как $\overline{F}_{k_n}^e \perp d\overline{s}_k, \overline{F}_{k_b}^e \perp d\overline{s}_k$, то работа этих сил на перемещение $d\overline{s}_k$ точки приложения силы равна нулю.

Тогда

$$dA_k^e = \overline{F}_k^e d\overline{s}_k = F_{k_\tau}^e ds_k = F_{k_\tau}^e r_k d\varphi = M_z(\overline{F}_{k_\tau}^e)d\varphi\,,$$

но

$$M_z(\overline{F}_{k_\tau}^e) = M_z(\overline{F}_k^e)\,.$$

$$dA_k^e = M_z(\vec{F}_k^e)d\varphi.$$

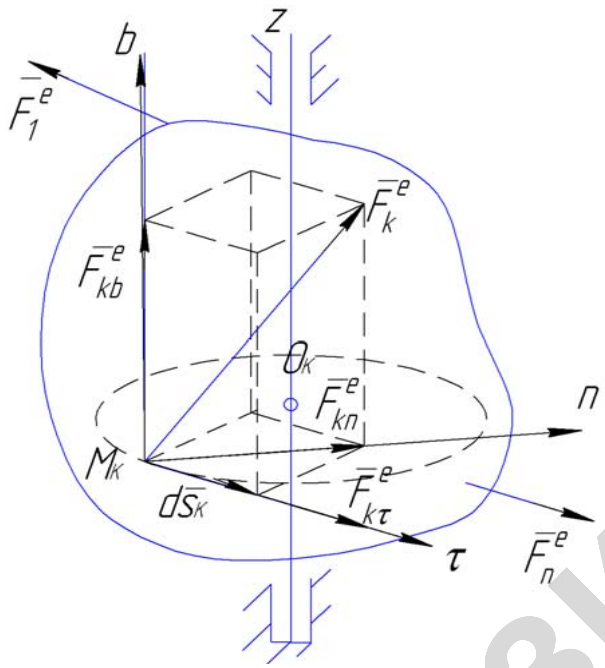


Рис. 49

Элементарная работа k-й внешней силы $\overline{F}_k^e$ равна произведению момента этой силы относительно оси вращения $M_z(\overline{F}_k^e)$ на элементарный угол поворота $d\varphi$ тела вокруг оси.

Элементарная работа всех внешних сил

$$dA^e = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e = \sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k^e)d\varphi, \tag{8.14}$$

где $\sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k^e)d\varphi = M_z^e$ – главный момент внешних сил относительно оси.

Работа сил на конечном перемещении

$$A^e = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^e d\varphi\,. \tag{8.15}$$

Если $M_z^e = \text{const}$, то

$$A^e = M_z^e(\varphi_2 - \varphi_1) = M_z^e \varphi_{\text{пов}}\,, \tag{8.16}$$

где $(\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_{\text{пов}}$ – конечный угол поворота;
$\varphi_{\text{пов}} = 2\pi n$, где n – число оборотов тела вокруг оси.

В более общем случае мощность силы можно определить как отношение элементарной работы силы dA к элементарному промежутку времени dt, за который совершена эта работа, что представляет собой производную от работы по времени. Поэтому

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{Fds\cos\left(\widehat{F_1, d\overline{s}}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Fs\cos\left(\widehat{F_1, \overline{s}}\right)\right) = F\cdot\vartheta\cos\left(\widehat{F, \overline{\vartheta}}\right). \tag{8.17}$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси

$$N = \frac{M_z^e d\varphi}{dt} = M_z^e\omega = \sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k^e)\omega\,, \tag{8.18}$$

где ω – угловая скорость вращения тела.

8. *Коэффициент полезного действия* (КПД) η – отношение выполненной полезной работы $A_{пол}$ ко всей затраченной работе $A_{зат}$, т. е.

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{зат}}. \tag{8.19}$$

9. *Единицы* измерения работы и мощности. В системе СИ единица измерения работы силы – джоуль (1 Дж = 1 Н · м), а в системе МкГС — кГм. Единица измерения мощности – соответственно – ватт (1 Вт = 1 Дж/с) и кГм/с.

75 кГм/с = 1 л. с. (лошадиная сила) = 736 Вт.

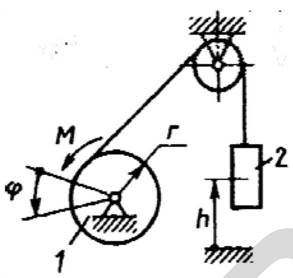
1 кВт = 1000 Вт = 1,36 л. с.

Вопросы для повторения

1. Что такое элементарная работа силы?
2. Как вычисляется работа силы на конечном перемещении?
3. Как вычисляется работа силы тяжести, силы упругости?
4. В каких случаях работа силы тяжести и сила упругости положительна, а в каких – отрицательна?
5. Что такое мощность силы?

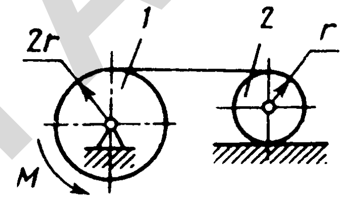
Задачи для самостоятельного решения

1. Груз *1* массой m_1 = 2 кг приводит в движение каток *2* массой m_2 = 1 кг. Коэффициент трения качения $f_k = 0{,}01$ м. Определить работу внешних сил системы при опускании груза *1* на высоту *h* = 1 м, если радиус катка *R* = 0,1 м.

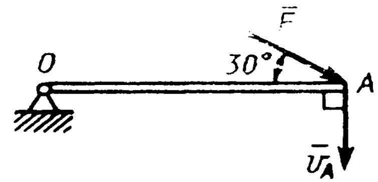


2. На барабан *1*, радиус которого *r* = 0,1 м, действует пара сил с моментом *M* = 40 + φ². Определить работу, совершенную парой сил и силой тяжести груза *2*, масса которого m_2 = 40 кг, при подъ-еме груза на высоту *h* = 0,3 м.

3. К барабану *1* приложена пара сил с постоянным моментом $M = 100$ Н · м. Цилиндр *2* массой m_2 = 10 кг катится без скольжения, коэффициент трения качения $f_k = 0{,}01$ м. Определить работу внешних сил системы при повороте барабана *1* на 10 оборотов.



4. На точку *A* кривошипа, который вращается вокруг горизонтальной оси *O*, действует в вертикальной плоскости сила *F* = 100 Н. Определить мощность силы *F*, если скорость ϑ_A точки *A* равна 4 м/с.

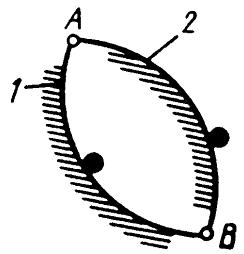


5. Моторная лодка движется по реке со скоростью 8 м/с. Сила тяги двигателя равно 3500 Н. Определить в кВт мощность силы тяги двигателя.

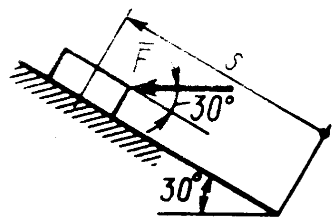
6. Однородный цилиндр массой 40 кг катится прямолинейно без скольжения по горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω = 4 рад/с. Коэффициент трения качения $f_k = 0{,}01$ м. Определить мощность сил сопротивления качения.

7. На вал двигателя действует крутящий момент *M* = 80(1 – ω/400). Определить в кВт мощность двигателя в момент времени, когда вал двигателя имеет скорость, равную 200 рад/с.

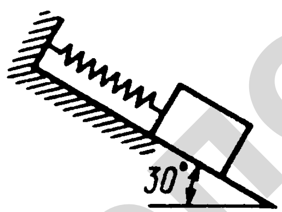
8. Тяжелая материальная точка может перемещаться в вертикальной плоскости из положения A в положение B по дуге окружности *1* или по дуге окружности *2* Будет ли работа силы тяжести точки одинакова при этих перемещениях?



9. Определить работу, совершенную постоянной силой F = 1 Н при подъеме тела на расстояние s = 1 м наклонной плоскости.



10. Тело массой m = 0,1 кг подвешено к концу нерастянутой пружины и отпущено без начальной скорости. Определить работу силы тяжести за первую половину периода колебаний, если коэффициент жесткости пружины c = 50 Н/м.



Тема 9. **Кинетическая энергия материальной точки и механической системы**

9.1. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кенига

Кинетическая энергия – скалярная мера механического движения.

Кинетическая энергия материальной точки – скалярная положительная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, т. е. $\dfrac{m\vartheta^2}{2}$.

Кинетическая энергия механической системы – арифметическая сумма кинетических энергий всех материальных точек этой системы (рис. 50):

$$E_k = \frac{m_1\vartheta_1^2}{2} + \frac{m_2\vartheta_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_n\vartheta_n^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k\vartheta_k^2}{2}. \tag{9.1}$$

Кинетическая энергия системы, состоящей из n связанных между собой тел, равна арифметической сумме кинетических энергий всех тел этой системы:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + \ldots + E_{kn} = \sum_{i=1}^{n} E_{ki}. \tag{9.2}$$

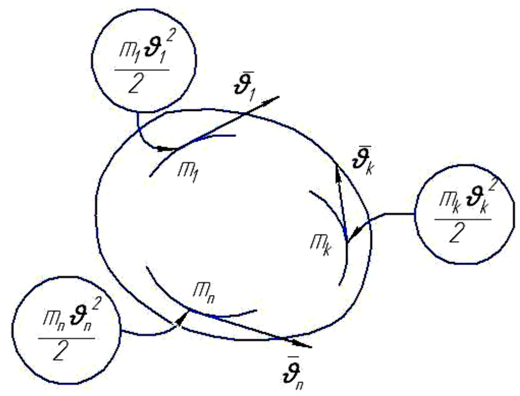


Рис. 50

Теорема Кенига

Кинетическая энергия механической системы в общем случае ее движения равна сумме кинетической энергии движения системы вместе с центром масс и кинетической энергии системы при ее движении относительно центра масс:

$$E_k = \frac{M\vartheta_c^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vartheta_{kc}^2}{2}\ , \qquad (9.3)$$

где ϑ_{kc} – скорость k-й точки системы относительно центра масс.

9.2. Кинетическая энергия твердого тела при различном движении

1. Поступательное движение.

При поступательном движении тела $\bar{\vartheta}_1 = \bar{\vartheta}_2 = ... = \bar{\vartheta}_n = \bar{\vartheta}_C$ (рис. 51).

С учетом (4.58)

$$E_k = \frac{M\vartheta_c^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vartheta_{kc}^2}{2}. \qquad (9.4)$$

Этот результат можно получить из (9.3), где для этого движения $\bar{\vartheta}_{kc} = 0$.

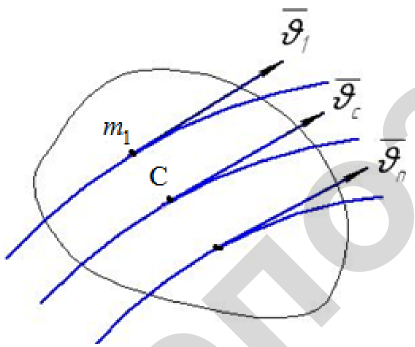


Рис. 51

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси (рис. 52).

$\vartheta_k = \omega r_k$.

С учетом (9.1)

$$E_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vartheta_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k r_k^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \qquad (9.5)$$

где $I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$ – момент инерции тела относительно оси вращения.

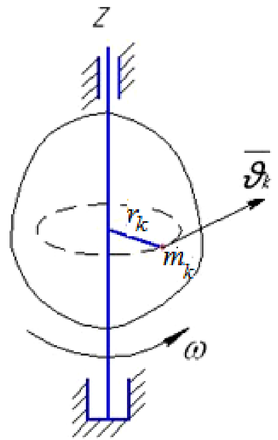


Рис. 52

3. Плоскопараллельное движение.

На основании теоремы Кенига (9.3) с учетом, что $\vartheta_{k_c} = \omega Ck$:

$$E_k = \frac{M\vartheta_C^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k (Ck)^2 \omega^2}{2} = \frac{M\vartheta_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2},$$

где $\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k (Ck)^2 \omega^2}{2} = I_C$ – момент инерции плоской фигуры относительно оси, проходящей через центр масс. *При плоском* движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс $\frac{M\vartheta_C^2}{2}$ и кинетической энергии вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс, $\dfrac{I_{zC}\omega^2}{2}$:

$$E_k == \frac{M\vartheta_C^2}{2} + \frac{I_{zC}\omega^2}{2}. \qquad (9.6)$$

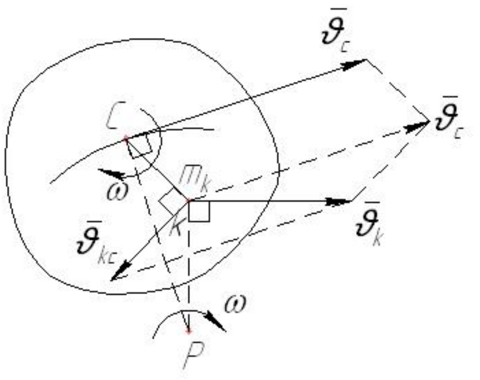


Рис. 53

Плоскопараллельное движение эквивалентно мгновенному вращательному вокруг оси, проходящей через МЦС (рис. 53). Поэтому $\vartheta_C = \omega \cdot PC$. С учетом этого (9.6) примет вид

$$E_k == \frac{M(PC)^2\omega^2}{2} + \frac{I_{zC}\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\left(I_{zC} + M(PC)^2\right),$$

где $I_{zC} + M(PC)^2 = I_{zP}$ – теорема Гюйгенса – Штейнера.

9.3. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Теорема в дифференциальной форме.

Дифференциал от кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.

Доказательство.

$$m\bar{a} = \bar{F}; \bar{a} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt}\cdot\frac{d\bar{s}}{d\bar{s}} = \frac{\bar{\vartheta}d\bar{\vartheta}}{d\bar{s}}.$$

Подставим в выражение второго закона динамики

$$m\frac{\bar{\vartheta}d\bar{\vartheta}}{d\bar{s}} = \bar{F} \Rightarrow m\bar{\vartheta}d\bar{\vartheta} = \bar{F}\cdot d\bar{s};\quad m\bar{\vartheta}d\bar{\vartheta} = d\left(\frac{m\bar{\vartheta}^2}{2}\right) = d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right);\ \bar{F}\cdot d\bar{s} = dA$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right) = dA. \qquad (9.7)$$

Теорема в интегральной (конечной) форме.

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.

Доказательство.

Дифференциал от кинетической энергии точки равен элементарной работе:

$$d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right) = m\vartheta d\vartheta = dA.$$

Проинтегрируем

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} m\vartheta d\vartheta = \int_{(s)} dA \Rightarrow \frac{m\vartheta_2^2}{2} - \frac{m\vartheta_1^2}{2} = A. \qquad (9.8)$$

9.4. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Теорема в дифференциальной форме.

Дифференциал от кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действующих на систему.

Доказательство. Для k-й точки системы

$$d\left(\frac{m_k \vartheta_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где dA_k^e и dA_k^i соответственно – элементарная работа внешней и внутренней сил, приложенных к k-й точке. Для всей системы

$$\sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{m_k \vartheta_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i.$$

$$\sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{m_k \vartheta_k^2}{2}\right) = d\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{m_k \vartheta_k^2}{2}\right) = dE_k,$$

где $E_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vartheta_k^2}{2}$ – кинетическая энергия системы;

$\sum_{k=1}^{n} dA_k^i = dA^i$, $\sum_{k=1}^{n} dA_k^e = dA^e$ – соответственно элементарная работа всех внутренних и внешних сил, приложенных к системе. Таким образом,

$$dE_k = dA^e + dA^i. \tag{9.9}$$

Для системы твердых тел с учетом (8.10)

$$dA^i = \sum_{k=1}^{n} dA_k^i = 0.$$

Тогда

$$dE_k = dA^e. \tag{9.10}$$

Разделим (9.9) на dt.

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{dA^e}{dt} + \frac{dA^i}{dt},$$

где $\frac{dA^e}{dt} = N^e$ – мощность внешних сил; $\frac{dA^i}{dt} = N^i$ – мощность внутренних.

Тогда

$$\frac{dE_k}{dt} = N^e + N^i \tag{9.11}$$

или с учетом (9.10)

$$\frac{dE_k}{dt} = N^e. \tag{9.12}$$

Вторая формулировка теоремы.

Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему (или только внешних (9.12)).

Теорема в интегральной (конечной) форме.

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, приложенных к системе, на том же перемещении.

Доказательство. Запишем теорему в интегральной форме для k-й точки системы:

$$\frac{m_k \vartheta_{2k}^2}{2} - \frac{m_k \vartheta_{1k}^2}{2} = A_k^e + A_k^i,$$

где A_k^e и A_k^i – соответственно работа внешней и внутренней сил, приложенных к k-й точке, на некотором перемещении.

Суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vartheta_{2k}^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vartheta_{1k}^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \Rightarrow E_{k2} - E_{k1} = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \cdot \tag{9.13}$$

Для неизменяемых систем твердых тел

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0$$

(по свойству внутренних сил). Тогда

$$E_{k2} - E_{k1} = \sum_{k=1}^{n} A_k^e. \tag{9.14}$$

Вопросы для повторения

1. Что такое кинетическая энергия материальной точки?

2. Чему равна кинетическая энергия механической системы.

3. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях?

4. В каких видах и какими формулами записывается теорема об изменении кинетической энергии материальной точки, механической системы?

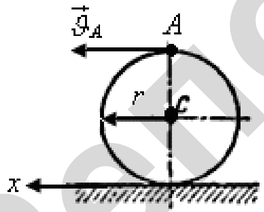
Задачи для самостоятельного решения

1. Материальная точка массой m = 1 кг движется по окружности со скоростью ϑ = 1 м/с. Определить кинетическую энергию этой точки.

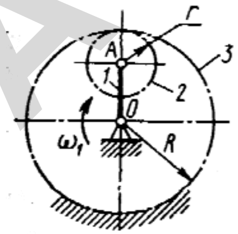
2. Прямолинейной движение материальной точки массой m = 4 кг задано уравнением $s = 4t + 2t^2$. Определить кинетическую энергию этой точки в момент времени t = 2 с.

3. Груз массой m = 5 кг, подвешенный к вертикальной пружине, совершает свободные колебания по закону $y = 0{,}1\sin(14t + 1{,}5\pi)$. Определить наибольшее значение кинетической энергии груза.

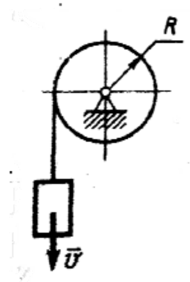
4. Диск массой m = *2* кг радиуса r = 1 м катится по плоскости, его момент инерции относительно оси, проходящий через центр C перпендикулярно плоскости рисунка, $I_c = 2$ кг$\cdot$м^2. Определить кинетическую энергию диска в момент времени, когда скорость точки A равна 1 м/с.



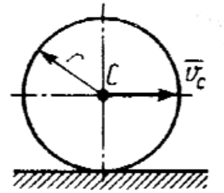
5. Определить кинетическую энергию системы, состоящий из двух одинаковых зубчатых колес массой m = 1 кг каждый, вращающихся с угловой скоростью ω = 10 рад/с. Радиус инерции каждого колеса относительно оси вращения равен 0,2 м.



6. Груз массой m = 4 кг, опускаясь вниз, приводит с помощью нити во вращение цилиндр радиуса R = 0,4 м. Момент инерции цилиндра относительно оси вращения I = 0,2 кг·м^2. Определить кинетическую энергию системы тел в момент времени, когда скорость груза ϑ = 2 м/с.

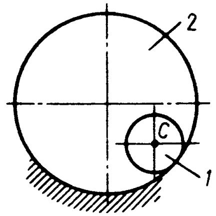


7. Кривошип *1*, вращаясь с угловой скоростью ω = 10 рад/с, приводит в движение колесо *2* массой 1 кг, которое можно считать однородным диском. Момент инерции кривошипа относительно оси вращения равен 0,1 кг·м^2. Определить кинетическую энергию механизма, если радиус $R = 3r$ = 0,6 м.



8. Диск массой m = 2 кг радиуса r = 1 м катится по плоскости, его момент инерции относительно оси, проходящий через центр C перпендикулярно плоскости рисунка, I_c = 2 кг·м^2. Определить кинетическую энергию диска в момент времени, когда скорость его центра ϑ_c=1 м/с.

9. Однородный цилиндр *1* массой m = 16 кг катится без скольжения по внутренней цилиндрической поверхности *2*. Определить кинетическую энергию цилиндра в момент времени, когда скорость его центра масс C равна 2 м/с.



10. Частота вращения рабочего колеса вентилятора равна 90 об/мин. Определить кинетическую энергию колеса, если момент инерции отосительно оси вращения равен 2,2 кг·м^2.

Тема 10. **Потенциальное силовое поле и потенциальная энергия**

Силовым полем называется часть пространства, в каждой точке которого на материальные точки действуют силы, зависящие от координат и времени, т. е.

$$Fx=Fx(x,y,z,t), \qquad Fy=Fy(x,y,z,t), \qquad Fz=Fz(x,y,z,t).$$

Стационарное силовое поле – поле, в котором силы не зависят от времени.

Потенциальное силовое поле – стационарное поле, в котором работа силы не зависит от формы траектории перемещения точки ее приложения. Такие силы называются потенциальными или консервативными. Это сила тяжести, сила упругости.

Потенциальная энергия $E_п$ точки или механической системы – это энергия покоя, которая представляет собой работу, совершаемую потенциальными силами при перемещении материальной точки или механической системы из заданного положения в некоторое нулевое положение (в нулевой уровень) – положение, в котором потенциальная энергия равна нулю.

Консервативная система – это механическая система, в которой действуют только потенциальные силы.

Проекции силы на оси декартовых координат в потенциальном силовом поле

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}.$$

Элементарная работа силы в потенциальном силовом поле

$$dA = -\left(\frac{\partial E_n}{\partial x}dx + \frac{\partial E_n}{\partial y}dy + \frac{\partial E_n}{\partial z}dz\right) = -dE_n, \qquad (10.1)$$

т. е. равна со знаком (-) полному дифференциалу от потенциальной энергии.

Работа силы на некотором перемещении в потенциальном силовом поле

$$\int_{M_1}^{M_2} dA = -\int_{M_1}^{M_2} dE_n \Rightarrow A_{1-2} = -(E_{n2} - E_{n1}) = E_{n1} - E_{n2}, \qquad (10.2)$$

где A_{1-2} – работа по перемещению из положения M_1 в положение M_2,
E_{n1} ; E_{n2} – потенциальная энергия соответственно в этих положениях.

Закон сохранения механической энергии материальной точки и механической системы

Если на материальную точку или механическую систему действуют только консервативные силы, то в любом положении точки или системы сумма кинетической и потенциальной энергий остается величиной постоянной.

Доказательство.

Для материальной точки на основании теоремы об изменении кинетической энергии (см. (9.7))

$$d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right) = dA.$$

С другой стороны, $dA = -dE_n$ (см. (10.1)).

Тогда

$$d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right) = -dE_n \Rightarrow d\left(\frac{m\vartheta^2}{2} + E_n\right) = 0 \;\Rightarrow \frac{m\vartheta^2}{2} + E_n = \text{const}.$$

Для механической системы аналогично

$$dE_k = dA^e \text{ , а } dA^e = -dE_n.$$

Тогда

$$dE_k = -dE_n \Rightarrow d\left(E_k + E_n\right) = 0 \;\Rightarrow E_k + E_n = \text{const},$$

где $E_k + E_n$ – полная механическая энергия системы.

Вопросы для проверки

1. Что такое потенциальная энергия?
2. Чему равна работа силы на некотором перемещении в потенциальном силовом поле?
3. Что такое консервативная система?

Тема 11. **Динамика твердого тела**

Динамика поступательного и вращательного движений твердого тела – рассмотренные теоремы динамики системы дают дифференциальные уравнения, описывающие эти два типа движения твердого тела.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела – из теоремы о движении центра масс системы:

$$\boxed{M\ddot{x}_C = R_x^e; \qquad M\ddot{y}_C = R_y^e; \qquad M\ddot{z}_C = R_z^e.}$$

Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси – из теоремы об изменении момента количества движения системы:

$$\boxed{I_z\ddot{\varphi}_z = M_z^e.}$$

Динамика плоского движения твердого тела – плоское движение может быть представлено как совокупность поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного движения вокруг центра масс. Это представление было использовано ранее при вычислении кинетической энергии:

$$\boxed{E_к = \frac{M\vartheta_C^2}{2} + \frac{I_{zC}\omega_z^2}{2}.}$$

Здесь найдем *дифференциальные уравнения движения твердого тела.* В кинематике уравнения движения плоской фигуры были полученыпри использовании в качестве полюса любой произвольной точки. В динамике в качестве полюса выбирают центр масс:

$$\boxed{\begin{aligned} &x_C = f_1(t);\\ &y_C = f_2(t);\\ &\varphi = f_3(t).\end{aligned}}$$

Первые два дифференциальные уравнения, описывающие поступательное движение тела, найдем, используя теорему о движении центра масс:

$$\boxed{M\overline{a}_C = \overline{R}^e.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} &M\ddot{x}_C = R_x^e = \sum F_{ix}^e;\\ &M\ddot{y}_C = R_y^e = \sum F_{iy}^e.\end{aligned}}$$

Третье дифференциальное уравнение, описывающее вращательное движение тела вокруг центра масс, найдем, используя теорему об изменении кинетического момента системы:

$$\boxed{\frac{dK_z}{dt} = M_z^e.} \Rightarrow \boxed{I_z\ddot{\varphi} = M_z^e = \sum M_{iz}^e.}$$

Вопросы для повторения

1. Запишите уравнения поступательного и вращательного движений твердого тела.
2. Как получаются дифференциальные уравнения плоского движения?

2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОНТРОЛЯ ПО МОДУЛЮ

Задание 1. *Динамика точки*

Вариант 1

В сухую погоду автомобиль проходит закругление на дороге на предельной скорости ϑ_1. Найти предельную скорость прохождения этого же поворота после дождя, когда коэффициент трения уменьшается в 4 раза. Считать, что автомобиль не опрокидывается.

Вариант 2

Материальная точка массой *m* движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса *R*, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы *Q*. Определить реакцию направляющей через время *t*. Вектор силы направлен внутрь вогнутости окружности и образует постоянный угол α с вектором скорости.

Вариант 3

Сила сопротивления воды при движении катера пропорциональна скорости $R_c = k_1\vartheta$. При этом максимальная скорость катера $\vartheta_{\max}$. Найти предельную скорость этого же катера, если бы сила сопротивления зависела от квадрата скорости $R_c = k_2\vartheta^2$.

Вариант 4

Автомобиль массой *m* разгоняется до некоторой скорости за время t_1. Сила сопротивления пропорциональна скорости $R_c = k\vartheta$. Чему будет равно время разгона до той же скорости при отсутствии сопротивления?

Вариант 5

Автомобиль массой *m* разгоняется до некоторой скорости за время t_1. Сила сопротивления пропорциональна скорости $R_c = k\vartheta$. Чему будет равно время разгона, если силу тяги автомобиля увеличить вдвое?

Вариант 6

Теплоход массой *m* после выключения двигателя движется со скоростью ϑ_0. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости и равно *R* при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет теплоход, прежде чем его скорость уменьшится вдвое?

Вариант 7

Катер массой m после остановки двигателя движется со скоростью $\square_0$. Сила сопротивление воды пропорциональна квадрату скорости и равна R при скорости 1 м/с. За какое время скорость катера уменьшится до $\square_1$.?

Вариант 8

Автомобиль начинает движение из состояния покоя по окружности радиуса R с постоянным ускорением a. Через какое время автомобиль соскользнет с окружности? Коэффициент трения f.

Вариант 9

Определить угол наклона ствола орудия к горизонту, если максимальная высота траектории Н, начальная скорость снаряда $\square_0$. Сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 10

Автомобиль массой m, имея скорость $\square_0$, начинает тормозить. Сила торможения пропорциональна скорости и в момент начала торможения равна R. Найти тормозной путь автомобиля.

Вариант 11

Тепловоз массой m, имея скорость $\square_0$, начинает тормозить. Сила торможения пропорциональна скорости и в момент начала торможения равна R. Через какое время скорость тепловоза уменьшится вдвое?

Вариант 12

С какой скоростью приземлится парашютист массой m, прыгнувший без начальной вертикальной скорости с высоты H. Сила сопротивления воздуха R.

Вариант 13

Самосвал без груза разгоняется с места до скорости $\square^*$ за время t^*. За какое время разгонится до той же скорости груженый самосвал, масса которого при погрузке увеличилась вдвое? Коэффициент трения f.

Вариант 14

За какое минимальное время автомобиль с постоянной скоростью объедет квадрат со стороной a, огибая углы по дугам окружности? Коэффициент трения f. Считать, что на поворотах возможно соскальзывание, но не опрокидывание.

Вариант 15

С аэростата сбросили балласт, его падение замедлилось, и через время t он поднялся на ту высоту, с которой сбросили балласт. Сколько времени после сброса балласта аэростат опускался? Сила сопротивления воздуха R = const, подъемная сила аэростата T, масса — m.

Вариант 16

Воздушный шар массой m_1 падает вниз. В момент, когда скорость шара равна $\square_0$, а ускорение a_0, сбросили балласт m_2. Как долго после этого будет продолжаться падение шара? Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, подъемная сила равна F.

Вариант 17

Тормозной путь автомобиля на горизонтальной дороге при скорости $\square_1$. равен S. Чему равен тормозной путь этого автомобиля при той же скорости на спуске α? Коэффициент трения f. Силу сопротивления воздуха считать постоянной.

Вариант 18

Аэростат массой M падает вниз с ускорением a. Какой балласт необходимо сбросить, чтобы через некоторое время аэростат поднимался вверх с тем же ускорением? Сила сопротивления воздуха R = const.

Вариант 19

Воздушный шар массой M падает вниз. На высоте H скорость шара равна $\square_0$, а ускорение a_0. Какой балласт необходимо сбросить, чтобы шар мягко ($\square = 0$) приземлился? Силу сопротивления воздуха считать постоянной.

Вариант 20

Автомобиль массой M без груза разгоняется с места до скорости $\square_0$ за время t_1. За какое время разгоняется до той же скорости автомобиль с грузом m? Сопротивление пропорционально скорости.

Вариант 21

Грузовик массой m имеет максимальную скорость υ_1 и разгоняется с места до $\square_0$ за время t_0. Чему равна средняя сила тяги грузовика? Сила сопротивления пропорциональна скорости.

Вариант 22

Воздушный шар массой m имеет вначале подъемную силу T. Скорость ветра $\square_1$. За счет негерметичности оболочки шара его подъемная сила со временем равномерно уменьшается. Пролетев расстояние S, шар падает. Найти вертикальную скорость шара в момент падения.

Вариант 23

Автомобиль без груза разгоняется с места до скорости □$_0$ за время t_1. Какую скорость он разовьет за то же время с грузом, составляющим 50 % массы автомобиля? Коэффициент трения f.

Вариант 24

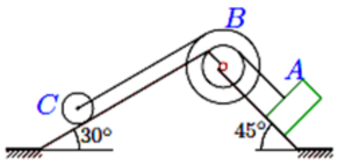
По мере подъема воздушного шара массой M его начальная подъемная сила T_0 равномерно с высотой уменьшается за счет охлаждения воздуха в оболочке. Максимальная высота подъема H. Найти скорость шара на высоте h.

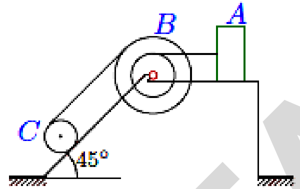
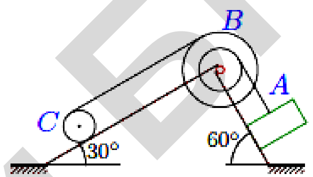
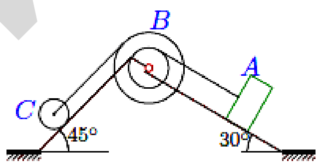
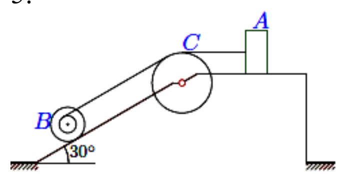
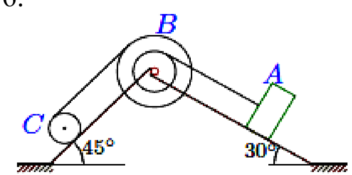
Вариант 25

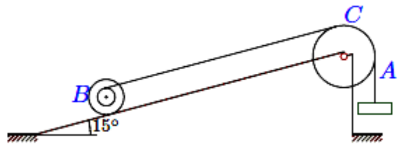
Воздушный шар массой M падает вниз. В момент, когда скорость шара равна □$_0$, а ускорение a_0, сбросили балласт m. На сколько метров после этого еще опустится шар? Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, подъемная сила F = const.

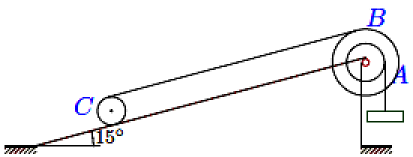
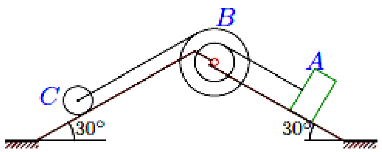
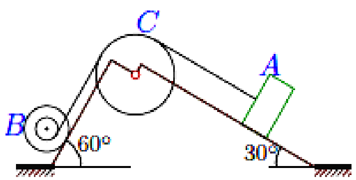
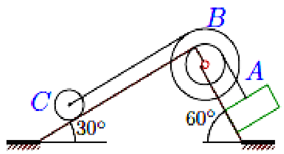
Задание 2. *Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы*

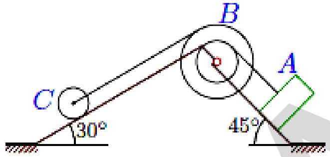
Механизм, состоящий из груза A, блока B (большой радиус R, меньший r) и цилиндра C радиусом R_c, установлен на призме, закрепленной на плоскости. Под действием сил тяжести из состояния покоя механизм пришел в движение. Между грузом A и призмой имеется трение (кроме тех вариантов, где груз висит). Качение цилиндра (блока) происходит без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения груза о поверхность f. Трения на неподвижной оси вращающегося блока (цилиндра) нити, соединяющие тела параллельны плоскостям. Какую скорость развил груз A, переместившись на расстояние S_A?

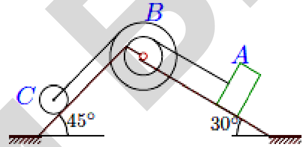
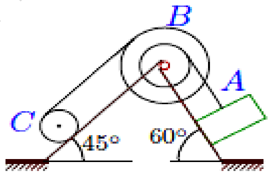
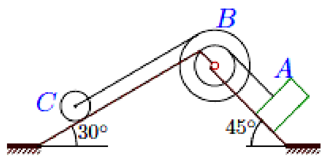
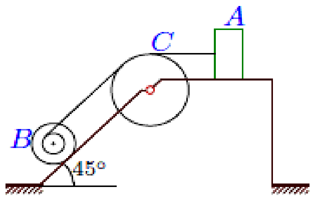
1. 	R = 70 см, r = 40 см, R_c = 30 см, f = 0,05, i = 58 см, m_A = 12 кг, m_B = 3 кг, m_C = 22 кг, δ = 0,4 мм, S_A = 1 м.
2.	R = 28 см, r = 16 см, R_c = 12 см, f = 0,05, i = 24 см, m_A = 12 кг, m_B = 6 кг, m_C = 16 кг,

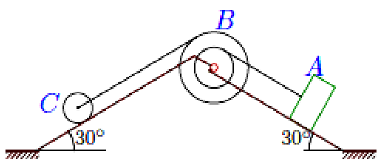
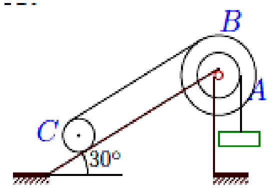
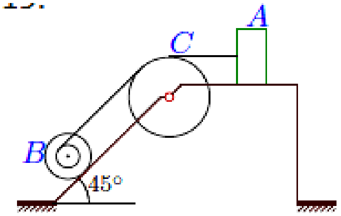
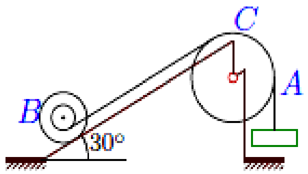
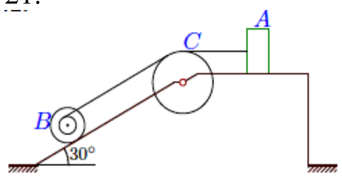
	δ = 0,1 мм, S_A = 2 м.
3. 	R = 56 см, r = 32 см, R_c = 24 см, f = 0,002, i = 45 см, m_A = 9 кг, m_B = 6 кг, m_C = 12 кг, δ = 0,3 мм, S_A = 2 м.
4. 	R = 42 см, r = 24 см, R_c = 18 см, f = 0,05, i = 35 см, m_A = 9 кг, m_B = 3 кг, m_C = 16 кг, δ = 0,2 мм, S_A = 1 м.
5. 	R = 24 см, r = 12 см, R_c = 42 см, f = 0,03, i = 21 см, m_A = 12 кг, m_B = 3 кг, m_C = 18 кг, δ = 0,2 мм, S_A = 1 м.
6. 	R = 42 см, r = 24 см, R_c = 18 см, f = 0,05, i = 35 см, m_A = 12 кг, m_B = 6 кг, m_C = 16 кг, δ = 0,2 мм, S_A = 2 м.
7.	R = 16 см, r = 8 см, R_c = 28 см, i = 15 см,

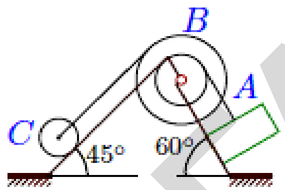
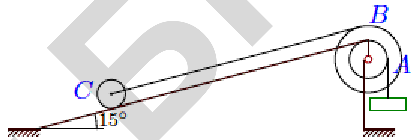
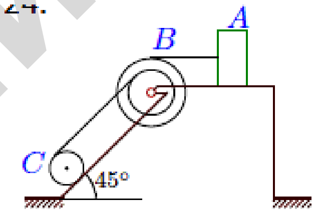
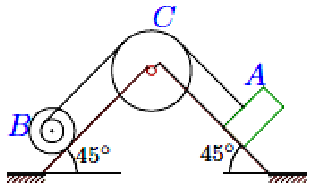
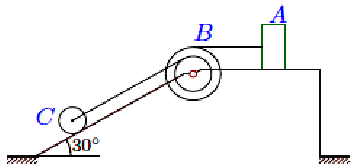
	m_A = 12 кг, m_B = 3 кг, m_C = 16 кг, δ = 0,1 мм, S_A = 1 м.

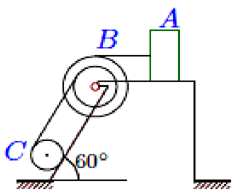
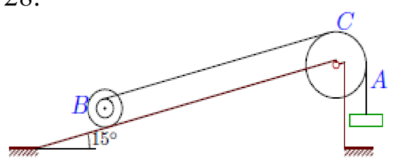
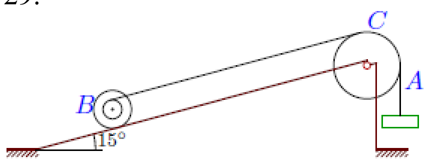
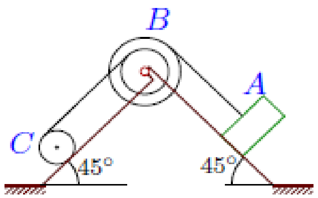
8. 	R = 28 см, r = 16 см, R_C = 12 см, i = 25 см, m_A = 15 кг, m_B = 6 кг, m_C = 18 кг, δ = 0,1 мм, S_A = 2 м.
9. 	R = 56 см, r = 32 см, R_C = 24 см, f = 0,01, i = 47 см, m_A = 12 кг, m_B = 3 кг, m_C = 19 кг, δ = 0,3 мм, S_A = 1 м.
10. 	R = 32 см, r = 16 см, R_C = 56 см, f = 0,01, i = 27 см, m_A = 15 кг, m_B = 6 кг, m_C = 19 кг, δ = 0,3 мм, S_A = 2 м.
11. 	R = 56 см, r = 32 см, R_C = 24 см, f = 0,05, i = 45 см, m_A = 6 кг, m_B = 3 кг, m_C = 7 кг, δ = 0,3 мм, S_A = 1 м.
12.	R = 42 см, r = 24 см,

	R_C = 18 см, f = 0,05, i = 34 см, m_A = 6 кг, m_B = 3 кг, m_C = 13 кг, δ = 0,2 мм, S_A = 1 м.

13. 	R = 42 см, r = 24 см, R_C = 18 см, f = 0,01, i = 35 см, m_A = 9 кг, m_B = 3 кг, m_C = 15 кг, δ = 0,2 мм, S_A = 1 м.
14. 	R = 70 см, r = 40 см, R_C = 30 см, f = 0,03, i = 57 см, m_A = 12 кг, m_B = 6 кг, m_C = 21 кг, δ = 0,4 мм, S_A = 2 м.
15. 	R = 70 см, r = 40 см, R_C = 30 см, f = 0,01, i =58 см, m_A = 12 кг, m_B = 3 кг, m_C = 22 кг, δ = 0,4 мм, S_A = 1 м.
16. 	R = 16 см, r = 8 см, R_C = 28 см, f = 0,02, i =14 см, m_A = 9 кг, m_B = 3 кг, m_C = 13 кг, δ = 0,1 мм, S_A = 1 м.

17. 	$R = 56$ см, $r = 32$ см, $R_C = 24$ см, $f = 0{,}02$, $i = 47$ см, $m_A = 12$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 22$ кг, $\delta = 0{,}3$ мм, $S_A = 1$ м.
18. 	$R = 70$ см, $r = 40$ см, $R_C = 30$ см, $i = 56$ см, $m_A = 9$ кг, $m_B = 6$ кг, $m_C = 15$ кг, $\delta = 0{,}4$ мм, $S_A = 2$ м.
19. 	$R = 16$ см, $r = 8$ см, $R_C = 28$ см, $f = 0{,}01$, $i = 14$ см, $m_A = 9$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 17$ кг, $\delta = 0{,}1$ мм, $S_A = 1$ м.
20. 	$R = 40$ см, $r = 20$ см, $R_C = 70$ см, $i = 31$ см, $m_A = 9$ кг, $m_B = 6$ кг, $m_C = 13$ кг, $\delta = 0{,}4$ мм, $S_A = 2$ м.
21. 	$R = 24$ см, $r = 12$ см, $R_C = 42$ см, $f = 0{,}01$, $i = 21$ см, $m_A = 12$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 18$ кг, $\delta = 0{,}2$ мм, $S_A = 1$ м.

22. 	$R = 70$ см, $r = 40$ см, $R_C = 30$ см, $f = 0{,}01$, $i = 57$ см, $m_A = 9$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 17$ кг, $\delta = 0{,}4$ мм, $S_A = 1$ м.
23. 	$R = 28$ см, $r = 16$ см, $R_C = 12$ см, $i = 25$ см, $m_A = 12$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 14$ кг, $\delta = 0{,}1$ мм, $S_A = 1$ м.
24. 	$R = 24$ см, $r = 16$ см, $R_C = 12$ см, $f = 0{,}03$, $i = 22$ см, $m_A = 12$ кг, $m_B = 6$ кг, $m_C = 22$ кг, $\delta = 0{,}1$ мм, $S_A = 2$ м.
25. 	$R = 32$ см, $r = 16$ см, $R_C = 56$ см, $f = 0{,}04$, $i = 26$ см, $m_A = 9$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 12$ кг, $\delta = 0{,}3$ мм, $S_A = 1$ м.
26. 	$R = 36$ см, $r = 24$ см, $R_C = 18$ см, $f = 0{,}04$, $i = 33$ см, $m_A = 12$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 14$ кг, $\delta = 0{,}2$ мм, $S_A = 1$ м.

27. 	$R = 36$ см, $r = 24$ см, $R_C = 18$ см, $f = 0{,}02$, $i = 33$ см, $m_A = 15$ кг, $m_B = 6$ кг, $m_C = 22$ кг, $\delta = 0{,}2$ мм, $S_A = 2$ м.
28. 	$R = 16$ см, $r = 8$ см, $R_C = 28$ см, $i = 15$ см, $m_A = 12$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 19$ кг, $\delta = 0{,}1$ мм, $S_A = 1$ м.
29. 	$R = 16$ см, $r = 8$ см, $R_C = 28$ см, $i = 15$ см, $m_A = 12$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 15$ кг, $\delta = 0{,}1$ мм, $S_A = 1$ м.
30. 	$R = 48$ см, $r = 32$ см, $R_C = 24$ см, $f = 0{,}01$, $i = 42$ см, $m_A = 12$ кг, $m_B = 6$ кг, $m_C = 15$ кг, $\delta = 0{,}3$ мм, $S_A = 2$ м.

3. ЗАДАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Задача Д1

Груз *D* массой *m*, получив в точке *A* начальную скорость ϑ_0, движется в изогнутой трубке *ABC*, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубки или оба наклонные, или один горизонтальный, а один наклонный (рис. Д1.0–Д1.9, табл. 1). На участке *AB* на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\bar{Q}$ (ее направление показано на рисунке) и сила сопротивления среды $\bar{R}$, зависящая от скорости $\bar{\vartheta}$ груза (направлена против движения); трением груза о трубку на участке *AB* пренебречь.

В точке *B* груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок *BC* трубки, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубку $f = 0{,}2$) и переменная сила $\bar{F}$, проекция которой F_x на ось *x* задана в таблице. Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки *A* до точки *B*, найти закон движения груза на участке *BC*, т.е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Таблица 1

Номер условия	m, кг	ϑ_0, м/с	Q, Н	R, Н	ℓ, м	t, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0{,}4\vartheta$	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8\vartheta^2$	1,5	–	$6t$
2	4,5	18	9	$0{,}5\vartheta$	–	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6\vartheta^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4\vartheta$	–	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0{,}5\vartheta^2$	4	–	$-6\sin(2t)$

Окончание табл. 1

Номер условия	m, кг	ϑ_0, м/с	Q, Н	R, Н	ℓ, м	t, с	F_x, Н
6	1,8	24	5	$0{,}3\vartheta$	–	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8\vartheta^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5\vartheta$	–	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2\vartheta^2$	4	–	$-6\sin(4t)$

Указания. Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке *AB*, учтя начальное условие. Затем, зная время движения груза на участке *AB* или длину этого участка, определить скорость груза в точке *B*. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке *BC*. После этого необходимо составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке *BC* — тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке *B*, и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке *AB* в случае, когда задана длина *l* участка, целесообразно прейти к переменной *x*, учтя, что $\dfrac{d\vartheta}{dt} = \vartheta_x \dfrac{d\vartheta_x}{dx}$

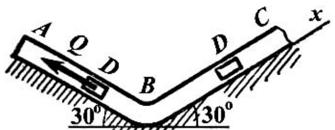


Рис. Д1.0

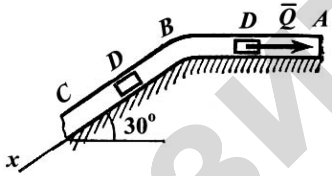


Рис. Д1.1

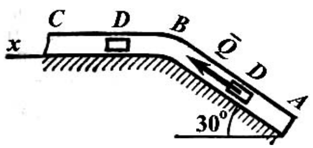


Рис. Д1.2

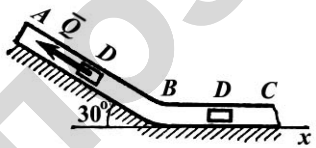


Рис. Д1.3

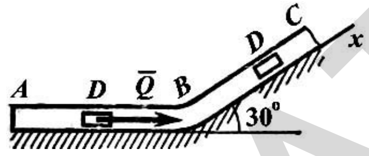


Рис. Д1.4

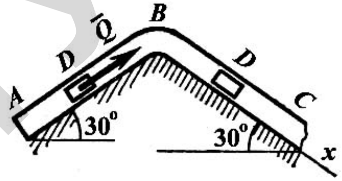


Рис. Д1.5

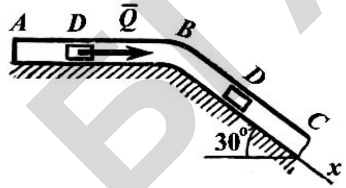


Рис. Д1.6

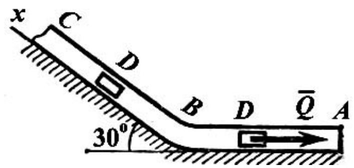


Рис. Д1.7

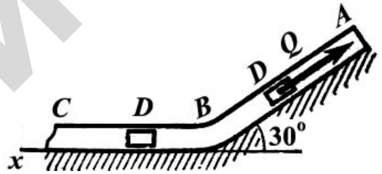


Рис. Д1.8

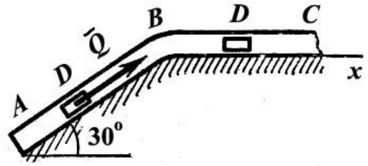


Рис. Д1.9

Пример Д1. На вертикальном участке *AB* трубы (рис. 54) на груз *D* массой *m* действует сила тяжести и сила сопротивления $\overline{R}$; движение от точки *A*, где $\vartheta_0 = 0$, до точки *B* длится t_1, с. На наклонном участке *BC* на груз действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен *f*) и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: $m = 8$ кг, $R = \mu\vartheta^2$, где $\mu = 0{,}2$ кг/м, $\vartheta_0 = 0$, $t_1 = 2$ с, $f = 0{,}2$, $F_x = 16\sin(4t)$, $\alpha = 30°$.

Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза на участке *BC*.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке *AB*, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$ и $\overline{R}$.

Проводим ось A_z и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d\vartheta_z}{dt} = \Sigma F_{kz}, \quad \text{или} \quad m\frac{d\vartheta_z}{dt} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

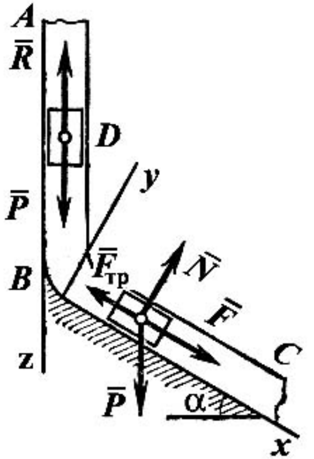


Рис. 54. Схема к примеру Д1

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке *AB*, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$ и $\overline{R}$. Проводим ось A_z и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d\vartheta_z}{dt} = \Sigma F_{kz}, \quad \text{или} \quad m\frac{d\vartheta_z}{dt} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu\vartheta^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $\vartheta_z = \vartheta$, получим

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = mg - \mu\vartheta^2, \quad \text{или} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - \vartheta^2\right). \qquad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначение:

$$n^2 = \frac{mg}{\mu} = 400 \quad (n = 20 \text{ м/с}), \qquad (3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2.

Тогда, разделяя в уравнении (2) переменные и взяв затем от обеих частей равенства интегралы, получим

$$\frac{d\vartheta}{n^2 - \vartheta^2} = \frac{\mu}{m}dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{2n}\ln\frac{n+\vartheta}{n-\vartheta} = \frac{\mu}{m}t + C_1. \qquad (4)$$

По начальным условиям, при $t = 0$ $\vartheta = \vartheta_0 = 0$, что дает $C_1 = \frac{1}{2n} \times \ln 1 = 0$. Введя еще одно обозначение:

$$k = n\frac{\mu}{m} = 0{,}5 \text{ с}^{-1}, \qquad (5)$$

получим из (4)

$$\ln\frac{n+\vartheta}{n-\vartheta} = 2kt \quad \text{и} \quad \frac{n+\vartheta}{n-\vartheta} = e^{2kt}.$$

Отсюда находим, что

$$\vartheta = n\frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}. \qquad (6)$$

Полагая здесь $t = t_1 = 2$ с и заменяя *n* и *k* их значениями (3) и (5), определим скорость ϑ_B груза в точке *B* (число $e = 2{,}7$):

$$\vartheta_B = 20\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = 15{,}2 \text{ м/с}. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим движение груза на участке *BC*. Найденная скорость ϑ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($\vartheta_0 = \vartheta_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{\text{тр}}$ и $\overline{F}$. Проведем из точки *B*

оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = P_x + N_x + F_{\text{тр}x} + F_x,$$

или

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} + F_x, \tag{8}$$

где $F_{\text{тр}} = fN$.

Для определения N составим уравнение в проекции на ось By. Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{\text{тр}} = fmg\cos\alpha$; кроме того, $F_x = 16\sin(4t)$, и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t). \tag{9}$$

Разделив обе части равенства на m, вычислим $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g\sin 30° - 0{,}2\cos 30° = 3{,}2$; $16/m = 2$ и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = 3{,}2 + 2\sin(4t). \tag{10}$$

Умножая обе части уравнения (3.10) на dt и интегрируя, найдём

$$\vartheta_x = 3{,}2t - \frac{1}{2}\cos(4t) + c_2. \tag{11}$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент времени $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $\vartheta = \vartheta_0 = \vartheta_B$, где ϑ_B даётся равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$c_2 = \vartheta_B + 0{,}5\cos 0 = 15{,}2 + 0{,}5 = 15{,}7.$$

При найденном значении c_2 уравнение (11) даёт

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 0{,}5\cos(4t) + 15{,}7. \tag{12}$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдём

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}13\sin(4t) + 15{,}7t + c_3. \tag{13}$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $c_3 = 0$, и окончательно искомый закон движения груза

$$x = 1{,}6t^2 + 15{,}7t - 0{,}13\sin(4t), \tag{14}$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Задача Д2

Механическая система состоит из грузов *1* и *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м и радиусом инерции относительно оси вращения $i_3 = 0{,}2$ м, блока 4 радиуса $R_4 = 0{,}2$ м и катка (или подвижного блока) *5* (рис. Д2.0–Д2.9, табл. 2); тело *5* считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока *4* – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив *3* (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив *3* действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным $s_1 = 0{,}2$ м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы 2, где обозначено: ϑ_1, ϑ_2, ϑ_{C5} – скорости грузов *1*, *2* и центра масс тела *5* соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел *3* и *4*.

Таблица 2

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	C, Н/м	M, Н·м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	ϑ_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	ϑ_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	ϑ_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	ϑ_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	ϑ_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	ϑ_{C5}

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток *5* на рис. 1), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз *2*, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Указания. Задача Д2 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия E_k системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или

между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример. Механическая система (рис. 55) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка *1*, подвижного блока *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения i_3, блока *4* и груза *5* (коэффициент трения груза о плоскость равен *f*). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив *3*. К центру *E* блока *2* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения *s* точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент *M* сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 0$, $m_3 = 4$ кг, $m_4 = 0$, $m_5 = 10$ кг, $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м, $i_3 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}1$, $c = 240$ Н/м, $M = 0{,}6$ Н·м, $F = 20(3+2s)$ Н, $s_1 = 0{,}2$ м.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

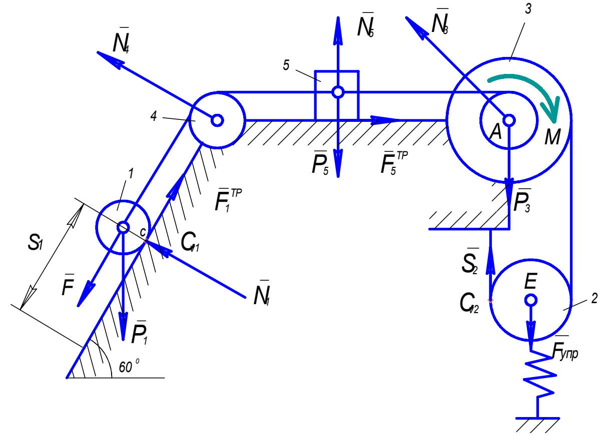


Рис. 55

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *1*, *3*, *5* и невесомых тел *2*, *4*, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}_1, \bar{F}_{\text{упр}}$, $\bar{P}_1, \bar{P}_3, \bar{P}_5$, реакции $\bar{N}_1, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5$, натяжение нити $\bar{s}_2$, силы трения $\bar{F}_1^{\text{тр}}, \bar{F}_5^{\text{тр}}$ и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$E_k - E_{k0} = \Sigma A_k^e. \tag{1}$$

2. Определяем E_{k0} и E_k. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $E_{k0} = 0$. Величина E_k равна сумме энергий всех тел системы

$$E_k = E_{k1} + E_{k3} + E_{k5}. \tag{2}$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело *5* – поступательно, а тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 \vartheta_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2;$$

$$E_{k3} = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2, \quad E_{k5} = \frac{1}{2} m_5 \upsilon_5^2. \tag{3}$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $\vartheta_{C1} = \vartheta_5 = \vartheta_A$, где A – любая точка обода радиуса r_3 шкива *3* и что точка $C_{\vartheta 1}$ – мгновенный центр скоростей катка *1*, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$\vartheta_{C1} = \vartheta_5 = \omega_3 r_3; \quad \omega_1 = \frac{\vartheta_{C1}}{C_{\vartheta 1} C_1} = \frac{\vartheta_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \tag{4}$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2; \; I_3 = m_3 i_3^2. \tag{5}$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$E_k = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 i_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \tag{6}$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 – перемещение груза *5* ($s_5 = s_1$), ϕ_3 – угол поворота шкива *3*, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинение пружины, получим

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s) ds = 20(3 s_1 + s_1^2);$$

$$A(P_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ;$$

$$A(F_5^{\text{тр}}) = -F_5^{\text{тр}} s_5 = -f P_5 s_1;$$

$$A(M) = -M \phi_3; \quad A(F_{\text{упр}}) = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки $C_{\vartheta 1}$ и $C_{\vartheta 2}$, где приложены силы $\bar{N}_1, \bar{F}_1^{\text{тр}}$ и $\bar{s}_2$ – мгновенные центры скоростей; точки, где приложены $\bar{P}_3, \bar{N}_3$ и $\bar{P}_4$ – неподвижны, а реакция $\bar{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и ϕ_3 надо выразить через заданное перемещение S_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, поскольку $\omega_3 = \vartheta_A / r_3 = \vartheta_{C1} / r_3$ (равенство $\vartheta_{C1} = \vartheta_A$ уже отмечалось), то $\phi_3 = s_1 / r_3$.

Далее, на рисунке 55 видно, что $\vartheta_D = \vartheta_B = \omega_3 R_3$, а так как точка $C_{\vartheta 1}$ является мгновенным центром скоростей для блока *2* (он как бы «катится» по участку нити $C_2 L$), то $\vartheta_E = 0{,}5 \vartheta_D = 0{,}5 \omega_3 R_3$, следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0{,}5 \phi_3$; $R_3 = 0{,}5 S_1 R_3 / r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы всех вычисленных работ получим

$$\sum A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60° - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $E_{k0} = 0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3 i_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_5^2\right)\omega_3^2 = \qquad (8)$$
$$= 20\left(3s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60° - fP_5 s_1 - \frac{M}{r_3}s_1 - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2$$

Из равенства (8) подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3.

Ответ $\omega_3 = 1$ с^{1}.

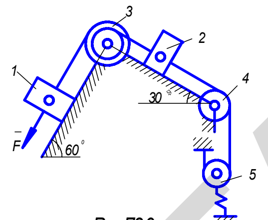


Рис.Д3.0

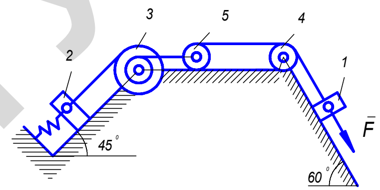


Рис.Д3.1

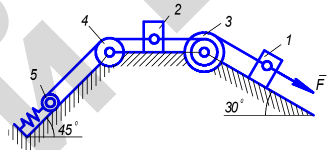


Рис.Д3.2

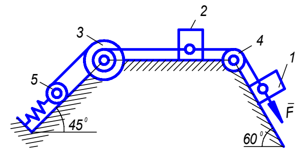


Рис.Д3.3

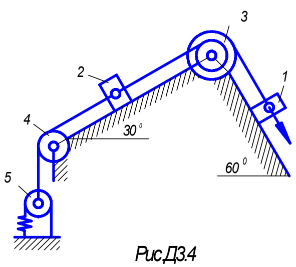


Рис.Д3.4

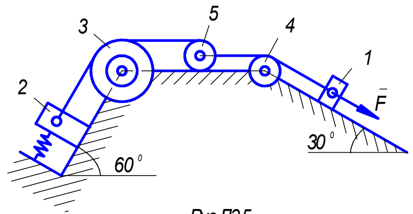


Рис.Д3.5

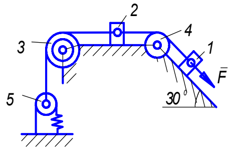


Рис.Д3.6

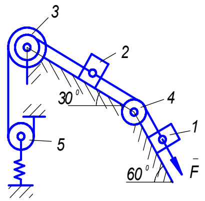


Рис.Д3.7

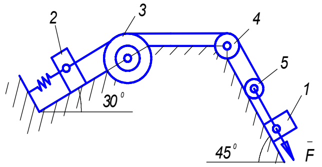


Рис.Д3.8

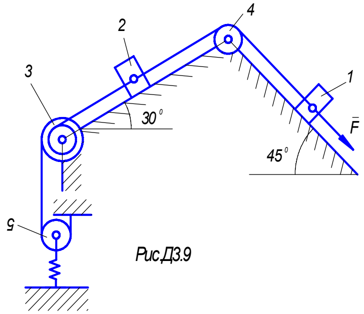


Рис.Д3.9

4. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

1. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр (шифр зачетной книжки), группа.

При чтении текста каждой задачи необходимо учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам Д1 и Д2 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам вертикальными, и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми; нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице все величины, относящиеся к ним, должны иметь соответствующие номера.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера — разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

2. Решение каждого задания обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Перед выполнением задания необходимо записать его условие, выбранные в соответствии с вариантом исходные данные, изобразить расчетную схему. Расчетная схема должна быть вычерчена в масштабе, с указанием всех размеров, числовых данных и осей, используемых

в расчете. Нагрузки следует показать в соответствии с их действительными направлениями.

3. При выполнении задания сначала надо наметить ход решения и те допущения, которые могут быть положены в его основу, а затем произвести расчет; при этом все необходимые вычисления (по возможности) сначала проделать в общем виде, обозначая все данные и искомые величины буквами, после чего вместо буквенных обозначений поставить их числовые значения и найти результат. Везде необходимо придерживаться стандартных обозначений. Расчеты должны быть выполнены в определенной последовательности, теоретически обоснованы и сопровождены пояснительным текстом.

Решение записывается подробно и аккуратно со всеми вычислениями, вспомогательными чертежами и пояснениями. При выполнении расчетов необходимо указывать литературу с отметкой страниц и таблиц, откуда взяты расчетные формулы, расчетные напряжения и другие величины.

4. Все расчеты должны производиться в единицах СИ. Вычисления следует вести с обычной в технических расчетах точностью (до трех значащих цифр после запятой).

5. Выполненные контрольные работы должны быть высланы в университет на рецензирование. Работы, поступившие на рецензиро-вание позже установленного срока, рассмотрению не подлежат.

6. После рецензирования контрольной работы необходимо внести в соответствии с замечаниями рецензента требуемые исправления (не в тексте решения, а в конце тетради на чистых листах после заголовка «Исправления к заданию»).

7. Если количество замечаний невелико и ошибки, допущенные студентом при выполнении контрольной работы, несущественны, т.е. требуется незначительная ее доработка, рецензент делает на обложке запись «К защите допускается».

В противном случае, если требуется существенно переработать контрольную работу или переписать ее заново, рецензент делает на обложке запись «К защите не допускается» (с соответствующим комментарием).

8. Запрещается стирать или заклеивать отмеченные преподавателем ошибки.

9. Работы, оформленные небрежно и без соблюдения предъявляемых к ним требований, а также работы, выполненные не по своему варианту, не рассматриваются и не засчитываются, возвращаются для переделки. К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

Выбор варианта

Студент выбирает *номер рисунка* по *предпоследней* цифре шифра, а *номер условия* в таблице – по *последней* цифре шифра.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЮ ПО МОДУЛЮ М3 «ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ» СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ

1. Динамика материальной точки. Законы динамики.
2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
3. Прямая задача динамики.
4. Обратная задача динамики.
5. Динамика относительного движения материальной точки.
6. Осевые и полярный момент инерции твердого тела.
7. Осевые моменты инерции некоторых однородных тел.
8. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей.
9. Центробежный момент инерции.
10. Динамика механических систем. Классификация и свойства сил.
11. Дифференциальные уравнения движения твердого тела при различных видах движения.
12. Теорема о движении центра масс.
13. Закон сохранения движения (следствие из теоремы о движении центра масс).
14. Количество движения материальной точки и механической системы.
15. Импульс силы.
16. Теорема об изменения количества движения материальной точки.
17. Теорема об изменении главного вектора количества движения механической системы.
18. Кинетический момент количества движения относительно центра и оси
19. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и оси.
20. Теорема об изменении момента количества движения механической системы относительно центра и оси.
21. Работа и мощность сил.
22. Работа силы упругости и силы тяжести.

23. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.
24. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы.
25. Потенциальное силовое поле и потенциальная энергия. Закон сохранения энергии.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Аркуша, А. И.* Руководство к решению задач по теоретической механике : учеб. пособие для студ. машиностроительных специальностей средних спец. учеб. заведений / А. И. Аркуша. – 4-е изд., испр. –Москва : Высшая школа, 1999. – 336 с.

2. *Бать, М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах: статика и кинематика : учеб. пособие для втузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 10-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Политехника, 1995. – 670 с.

3. *Воронков, И. М.* Курс теоретической механики / И. М. Воронков. – 16-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1996. – 494 с.

4. *Лачуга, Ю. Ф.* Теоретическая механика : учебник для студентов вузов по агроинженерным специальностям / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. – Москва : Колос, 2000. – 576 с.

5. *Мещерский, И. В.* Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для студентов вузов, обуч. по техническим специальностям / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 37-е изд., испр. – СПб. : ЛАНЬ, 1998. – 448 с.

6. *Руденок, Е.Н.* Техническая механика. Сборник заданий : учебное пособие / Е. Н. Руденок, В. П. Соколовская. – Минск : Выш. шк., 1990. – 238 с.

7. Сборник задач по теоретической механике с решениями. Статика. Кинематика : учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. 1 / В. А. Акимов [и др.]. – Минск : УП "Технопринт", 2001. – 366 с.

8. Сборник задач по теоретической механике с решениями. Динамика : учебное пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. 2 / В. А. Акимов, [и др.]. – Минск : УП "Технопринт", 2001. – 576 с.

9. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики : учебник для студентов втузов / С. М Тарг. – Москва : Высшая школа, 2008. – 416 с.

10. *Федута, А. А.* Теоретическая механика и методы математики : учеб. пособие для студентов втузов / А. А. Федута, А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск : УП "Технопринт", 2000. – 504 с.

Дополнительная

1. Кинематика : методические указания по теоретической механике для студ. АМФ по спец. С. 03.01.00 «Механизация сельского хозяйства» / сост.: Н. Н. Филиппова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2002. – 30 с.

2. Статика, кинематика : методические указания по теоретической механике для студ. после техникума АМФ по спец. 1-74 06 01 «Технич. обеспеч. процессов с.-х. пр-ва», 1-74 06 02 «Технич. обеспеч. процессов хранения и перераб. с.-х. продукции», 1-74 06 03 «Ремонтно-обслуж. пр-во в с.-х.», 1-74 06 06 «Матер.-технич. обеспеч. АПК» / сост.: Н. Н. Филиппова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2003. 45 с.

3. Теоретическая механика : методические указания и задания к вып. контр. работ для студ. заочн. отд. по спец.: 1-74 06 01 «Технич. обеспеч. процессов с.-х. пр-ва», 1-74 06 02 «Технич. обеспеч. процессов хранения и перераб. с.-х. продукции» / сост.: И. С. Крук, Ю. С. Биза, Т. В. Смагина. – Минск : БГАТУ, 2006. – 76 с.

4. Теоретическая механика : методические указания и контрольные задания к вып. контр. работ для студ. заочн. отд. по спец. 1-74 06 01 «Технич. обеспеч. процессов с.-х. пр-ва» (НИСПО), 1-74 06 03 «Ремонтно-обслуж. пр-во в сельском хозяйстве» / сост.: И. С. Крук, Т. А. Рубинова. – Минск : БГАТУ, 2006. – 50 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Раздел «Динамика»

Учебно-методический комплекс

В 2-х частях

Часть 1

Составители:
Биза Юльян Степанович,
Ракова Нина Леонидовна,
Тарасевич Ирина Антоновна

Ответственный за выпуск *А. Н. Орда*
Редактор *Н. А. Антипович*
Компьютерная верстка *А. О. Лабун*

Подписано в печать 25.09.2013 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 5,45. Тираж 150 экз. Заказ 474.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр. Независимости, 99–2, 220023, Минск.