УДК 517.91

МЕТОД ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ ГРУП-ПЫ МОНОДРОМИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРОБЛЕМЫ РИМАНА

Л.А. Хвощинская[1], Т.Н. Жоровина[2]

[1] *Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск, ludmila.ark@gmail.com*

[2] *Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, zhorovina@bsu.by*

Аннотация. Предложен новый метод построения дифференциальных матриц проблемы Римана с группой монодромии третьего порядка. Получена формула представления логарифма произведения двух матриц группы монодромии третьего порядка. Методом логарифмирования построены дифференциальные матрицы 3×3 уравнения Фукса с тремя особыми точками.

Ключевые слова: проблема Римана, группа монодромии, дифференциальное уравнение класса Фукса, метод логарифмирования.

LOGARITHMIZATION METHOD FOR PRODUCT OF MATRICES OF THE THIRD-ORDER MONODROMY GROUP OF THE RIEMANN PROBLEM

L.A. Khvostchinskya[1], T.N. Zhorovina[2]

[1] *Belarusian State Agrarian Technical University, Republic of Belarus, Minsk, ludmila.ark@gmail.com*

[2] *Belarusian State University, Republic of Belarus, Minsk, zhorovina@bsu.by*

Abstract. We propose a new method for constructing differential matrices for the Riemann problem with third order monodromy group. We obtain a closed formula for a logarithm of a product of two matrices for the third order monodromy group. Using the logarithmization method we construct 3×3 differential matrices for the Fuchs equation with three singular points.

Keywords: Riemann problem, monodromy group, Fuchs class differential equation, logarithmization method.

Двадцать первая проблема Гильберта (проблема Римана-Гильберта) — одна из 23 задач, которые Давид Гильберт предложил в 1900 году на Международном конгрессе математиков, состоявшая в подтверждении или опровержении гипотезы о существовании системы линейных дифференциальных уравнений для произвольной заданной системы особых точек и матриц монодромии. Разные подходы к решению проблемы Римана предлагали Гильберт, Племель, Карлеман, Гахов, Мусхелишвили, Векуа, Лаппо-Данилевский, Еругин, Болибрух и др. [1]. Поиск новых методов решения остается актуальным в связи с приложениями в гидромеханике, электростатике, теории упругости, теории конформных отображений и др.

В 2015 году для матриц 2×2 группы монодромии предложен «метод логарифмирования» произведения матриц, который оказался эффективным при решении задачи с произвольным числом особых точек [2,3]. Цель настоящей работы — распространить этот метод к произведению матриц 3×3 группы монодромии. Для этого воспользуемся результатами, полученными в работе [4].

В [4] рассмотрена задача определения системы трех функций $Y(z)=(y_1,y_2,y_3)$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением трех точек $a_1=0,\ a_2=1$, $a_3=\infty$, при обходе вокруг которых функция $Y(z)$ испытывает линейные преобразования с помощью постоянных невырожденных матриц V_1,V_2,V_3 третьего порядка, образующих группу монодромии, $V_1V_2V_3=E$. В настоящей работе выберем класс функций, интегрируемых при $z\to 0,\ z\to 1$ и почти ограниченных (т.е. допускающих логарифмическую особенность) при $z\to\infty$. В выбранном классе функций задача будет безусловно разрешимой.

Обозначим характеристические числа матриц V_k через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k=1,2,3$, и найдем числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k,\quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k,\quad \omega_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\gamma_k,\ k=1,2,3;\ \mathrm{Re}\,\rho_k, \mathrm{Re}\,\sigma_k, \mathrm{Re}\,\omega_k \in (-1,0]. \tag{1}$$

В качестве $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ выберем те из характеристических чисел матрицы V_3, для которых $\mathrm{Re}\,\rho_3 \le \mathrm{Re}\,\sigma_3 \le \mathrm{Re}\,\omega_3$. Обозначим $s_k = \rho_k + \sigma_k + \omega_k$, $r_k = \rho_k\sigma_k + \sigma_k\omega_k + \rho_k\omega_k$, $d_k = \rho_k\sigma_k\omega_k$, $k=1,2,3$, $\varkappa = -\sum_{k=1}^{3}\left(\rho_k + \sigma_k + \omega_k\right)$. Целое число $\varkappa$ называется суммарным индексом задачи, $0 \le \varkappa \le 8$. Порядки столбцов решений задачи на бесконечности характеризуют числа $\rho = \rho_3 + k_1$, $\sigma = \sigma_3 + k_2$, $\omega = \omega_3 + k_3$, где целые числа k_1, k_2, k_3 подбираются таким образом, чтобы выполнялось соотношение Фукса

$$\rho_1 + \sigma_1 + \omega_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \omega_2 + \rho + \sigma + \omega = 3, \tag{2}$$

т.е. $k_1 + k_2 + k_3 = 3 + \varkappa$. Следовательно, $k_j = 1 + \left[(\varkappa - j)/3\right]$, $j = 1,2,3$, и

$$\rho = \rho_3 + \left[(\varkappa+2)/3\right],\quad \sigma = \sigma_3 + \left[(\varkappa+1)/3\right],\quad \omega = \omega_3 + \left[\varkappa/3\right]. \tag{3}$$

В результате вычислений было построено дифференциальное уравнение Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y\left(\frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1}\right) \tag{4}$$

дифференциальными матрицами $U_1 = \left(u_{ij}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{13}^{(1)} \\ -1 & 1 & u_{23}^{(1)} \\ 0 & -1 & u_{33}^{(1)} \end{pmatrix}$, $U_2 = \left(u_{ij}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -\rho & u_{12}^{(2)} & u_{13}^{(2)} \\ 1 & -\sigma & u_{23}^{(2)} \\ 0 & 1 & u_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$,

где $u_{13}^{(1)} = d_1, u_{23}^{(1)} = 1 - s_1 + r_1$, $u_{33}^{(1)} = s_1 - 1$, $u_{12}^{(2)} = \rho\left(\sigma - \rho - 1\right)$, $u_{33}^{(2)} = \rho + \sigma + s_2$, $u_{13}^{(2)} = d_2 - \rho\left[\left(1-\sigma\right)\left(\rho + s_2\right) + \left(\rho + \sigma\right)\left(\rho - \sigma + 1\right) - r_2\right]$, $u_{23}^{(2)} = \rho\left(1-\sigma\right) - \left(\rho+\sigma\right)\left(\sigma + s_2\right) - r$.

Матрицы $U_k \sim \dfrac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k=1,2$. Отметим, что матрица $U = U_1 + U_2$ является треугольной:

$$U = (u_{ij}) = U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} -\rho & u_{12}^{(2)} & u_{13}^{(1)} + u_{13}^{(2)} \\ 0 & 1-\sigma & u_{23}^{(1)} + u_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 2-\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1-\sigma & u_{23} \\ 0 & 0 & 2-\omega \end{pmatrix},$$

а матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u_{12}}{\rho - \sigma + 1} & \dfrac{u_{12}u_{23} + \left(\sigma - \omega + 1\right)u_{13}}{\left(\sigma - \omega + 1\right)\left(\rho - \omega + 2\right)} \\ 0 & 1 & \dfrac{u_{23}}{\sigma - \omega + 1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводит матрицу U к диагональной жордановой форме. При этом у матриц $\tilde{U}_1 = C^{-1}U_1C$ и $\tilde{U}_2 = C^{-1}U_2C$ известны следующие элементы: $\tilde{u}_{11}^{(1)} = u_{12}/\left(\rho - \sigma + 1\right) = -\rho$, $\tilde{u}_{11}^{(2)} = 0$, $\tilde{u}_{31}^{(1)} = \tilde{u}_{31}^{(2)} = 0$, $\tilde{u}_{21}^{(1)} = \tilde{u}_{32}^{(1)} = -1$, $\tilde{u}_{21}^{(2)} = \tilde{u}_{32}^{(2)} = 1$.

Формулы для дифференциальных матриц уравнения (4) получены построением «матриц-вычетов» с дальнейшим их преобразованием. К сожалению, применение этого метода при увеличении особых точек ограничено, часть элементов дифференциальных матриц остается неопределенной. Предложенный в [2] «метод логарифмирования» снимает эти трудности для матриц группы монодромии 2×2. Выведем аналогичную формулу для представления логарифма произведения матриц 3×3 группы монодромии, которая позволит в дальнейшем строить по индукции дифференциальные матрицы для групп монодромии размерности 3×3 и любым числом особых точек.

Пусть V_1, V_2 — постоянные невырожденные матрицы 3-го порядка, $V_3 = V_1 V_2$. Равенство $\ln(V_1 V_2) = \ln V_1 + \ln V_2$ справедливо лишь для перестановочных матриц. Выведем формулу, связывающую логарифмы матриц V_1, V_2 и $V_3 = V_1 V_2$ в общем случае. Обозначив характеристические числа матриц V_k через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k = 1,2,3$, найдем числа $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$, $\omega_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\gamma_k$, $k = 1,2,3$; $\operatorname{Re}\rho_k, \operatorname{Re}\sigma_k, \operatorname{Re}\omega_k \in (-1,0]$.

Зафиксируем определенные ветви логарифмов ρ_1, σ_1, ω_1, ρ_2, σ_2, ω_2. Тогда ветви логарифмов для ρ_3, σ_3, ω_3 должны быть согласованы и выбираются из условия $\rho_1 + \sigma_1 + \omega_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \omega_2 = \rho_3 + \sigma_3 + \omega_3$.

Пусть жорданова форма матрицы является диагональной, т.е. среди чисел ρ_3, σ_3, ω_3 нет совпадающих. Представим матрицу $S_3 = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}$ в виде суммы двух матриц

$$S_3 = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} \rho_3 & s_{12} & s_{13} \\ -1 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & -1 & s_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -s_{12} & -s_{13} \\ 1 & \sigma_3 - s_{22} & -s_{23} \\ 0 & 1 & \omega_3 - s_{33} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $S_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k = 1,2$, а числа s_{ij} подлежат дальнейшему определению. Используя основные инварианты матриц S_1 и S_2, составим систему 5-ти алгебраических уравнений:

$$d_1 = \rho_3(s_{22}s_{33} + s_{23}) + s_{12}s_{33} + s_{13}, \quad d_2 = s_{12}(\omega_3 - s_{33}) - s_{13}, \quad s_1 = \rho_3 + s_{22} + s_{33},$$

$$r_1 = \begin{vmatrix} \rho_3 & s_{12} \\ -1 & s_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \rho_3 & s_{13} \\ 0 & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ -1 & s_{33} \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} 0 & -s_{12} \\ 1 & \sigma_3 - s_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -s_{12} \\ 0 & \omega_3 - s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_3 - s_{22} & -s_{23} \\ 1 & \omega_3 - s_{33} \end{vmatrix},$$

решая которую, находим

$$\begin{aligned}
s_{22} &= \left[\sigma_3(s_2 - \sigma_3) - \rho_3(s_1 - \rho_3) + r_1 - r_2\right] / (\omega_3 - \sigma_3), \\
s_{22} &= \left[\sigma_3(s_2 - \sigma_3) - \rho_3(s_1 - \rho_3) + r_1 - r_2\right] / (\omega_3 - \sigma_3), \\
s_{33} &= \left[\rho_3(s_1 - \rho_3) - \omega_3(s_2 - \sigma_3) - r_1 + r_2\right] / (\omega_3 - \sigma_3), \\
&= \left[(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \sigma_1)(\rho_3 - \omega_1) - d_2\right]\left[\omega_3(s_2 - \sigma_3) - \rho_3(s_1 - \rho_3) + r_1 - r_2\right] / (\rho_3 - \sigma_3)(\omega_3 - \sigma_3) - d_2, \\
s_{23} &= r_2 - s_{12} - (\sigma_3 - s_{22})(\omega_3 - s_{33}) = r_2 - \left[(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \sigma_1)(\rho_3 - \omega_1) - d_2\right] / (\rho_3 - \sigma_3) + \\
&\quad + \left[r_3 - r_1 + r_2 - s_2(\rho_3 + \sigma_3)\right]\left[r_3 - r_1 + r_2 - s_2(\rho_3 + \omega_3)\right] / (\omega_3 - \sigma_3)^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, нами получено представление матрицы S_3, в котором все элементы однозначно выражаются через характеристические числа матриц S_1 и S_2. Заметим, однако, что преобразование подобия обеих частей (5) с помощью диагональной матрицы T, у которой все элементы, кроме диагональных элементов c_1, c_2, c_3, равны нулю, сохраняет справедливость равенства (5). При этом условия $\tilde{u}_{21}^{(1)} = \tilde{u}_{32}^{(1)}$, $\tilde{u}_{21}^{(2)} = \tilde{u}_{32}^{(2)}$ будут выполняться, если $c_1/c_2 = c_2/c_3$, т.е. $c_1 c_3 = c_2^2$. Следовательно, полученное нами представление (5) будет единственным с точностью до преобразования подобия с помощью диагональной матрицы $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$, где c – произвольная постоянная.

Возвращаясь теперь к проблеме Римана, замечаем, что матрицы V_1, V_2, V_3 группы монодромии связаны соотношением $V_1 V_2 V_3 = E$, а ветви логарифмов ρ, σ, ω характеристических чисел матрицы V_3 удовлетворяют соотношению Фукса (2) и находятся по формулам (3). Поэтому, если в формулах (6) заменить ρ_3 на $-\rho$, σ_3 на $1-\sigma$, а ω_3 на $2-\omega$, то равенство (5) не нарушается, принимая другой вид. Кроме того, представление (5) выводили в предположении, что жорданова форма V_3 является диагональной. Если среди характеристических чисел V_3 есть совпадающие, например, $\alpha_3 = \beta_3$, то $\rho = \sigma$, а в представлении на главной диагонали матрицы слева будут стоять несовпадающие числа $-\rho,\ 1-\rho,\ 2-\omega$. Поэтому при любых жордановых формах V_3, мы проводим представление диагональной матрицы. Сформулируем полученный результат.

Теорема. Пусть V_1, V_2, V_3 — постоянные невырожденные 3×3 матрицы, $V_1 V_2 V_3 = E$, с характеристическими числами $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k = 1, 2, 3$, а числа ρ_k, σ_k, ω_k, ρ, σ, ω находятся по формулам (1), (3) и $\operatorname{Re}\rho_3 \le \operatorname{Re}\sigma_3 \le \operatorname{Re}\omega_3$. Тогда матрица $S = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 2-\omega \end{pmatrix}$ представима в виде суммы двух матриц $S = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} -\rho & cs_{12} & c^2 s_{13} \\ -1/c & s_{22} & cs_{23} \\ 0 & -1/c & s_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -cs_{12} & -c^2 s_{13} \\ 1/c & 1-\sigma-s_{22} & -cs_{23} \\ 0 & 1/c & 2-\omega-s_{33} \end{pmatrix}$, элементы которых находятся по формулам

$$s_{22} = \left[(1-\sigma)(s_2+\sigma-1)+\rho(s_1+\rho)+r_1-r_2\right]/(\sigma-\omega+1),$$
$$s_{33} = \left[(\omega-2)(s_2+\sigma-1)-\rho(s_1+\rho)-r_1+r_2\right]/(\sigma-\omega+1),$$
$$s_{12} = \left[(\rho+\rho_1)(\rho+\sigma_1)(\rho+\omega_1)+d_2\right]/(\rho-\sigma+1),$$
$$s_{13} = s_{12}(2-\omega-s_{33})-d_2,$$
$$s_{23} = r_2 - s_{12} - (1-\sigma-s_{22})(2-\omega-s_{33}),$$

где c – произвольная постоянная, причем матрицы S_k, $k = 1, 2$, являются дифференциальными матрицами уравнения (4).

Для того, чтобы построить 3×3 дифференциальные матрицы проблемы Римана с четырьмя особыми точками и группой монодромии V_1, V_2, V_3, V_4, $V_1 V_2 V_3 V_4 = E$, представляем матрицу V_4^{-1} в виде произведений двух матриц $V_4^{-1} = V_1(V_2 V_3) = V_1 V_{23}$, $V_4^{-1} = (V_1 V_2) V_3 = V_{12} V_3$, и к каждому из них применим формулу (6). При этом нам необходимо будет знать не только характеристические числа матриц V_k $(k = 1, \dots, 4)$, но и матриц $V_1 V_2$ и $V_2 V_3$. Аналогичный приём применяем при любом числе матриц монодромии.

Библиографический список

1. Еругин Н. П. Проблема Римана. Мн.: Наука и техника. 1982. 336 с.
2. Хвощинская Л. А. Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана // Матер. междунар. семнадцатой науч. конф. им. акад. М. Кравчука, 19–20 мая 2016. Т.1. Киев: НТУУ «КПИ». 2016. С. 263–266.
3. Khvostchinskaya L. A. On a Method of Solving Integral Equation of Carleman Type on Pair of Segments // Transmutation Operators and Apptications. Springer Nature. Switzerland. 2020. P. 431–446.
4. Хвощинская Л. А. Построение дифференциального уравнения с группой монодромии третьего порядка и тремя особыми точками // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XXXII Междунар.науч. конф.: в 12 т. Т. 12: в 3 ч. Ч. 3 / под общ. ред. А. А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2019. С. 3–6.