ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л. А. Хвощинская
Белорусский государственный аграрный технический университет,
Минск, Беларусь
ludmila.ark@gmail.com

Пусть A_1, A_2 — постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка. Равенство

$$\ln\left(A_1 \cdot A_2\right) = \ln A_1 + \ln A_2$$

справедливо лишь для перестановочных матриц [1]. Выведем формулу, связывающую логарифмы матриц A_1, A_2 и $A_3 = A_1 \cdot A_2$ в случае неперестановочных матриц.

Обозначим α_k, β_k характеристические числа матриц A_k $(k = 1,2,3)$ и $\rho_k = \ln\alpha_k$, $\sigma_k = \ln\beta_k$.

Зафиксируем ветви логарифмов для ρ_1, σ_1, ρ_2, σ_2 (например,

$$0 \le \operatorname{Re}\rho_k < 2\pi,\ 0 \le \operatorname{Re}\sigma_k < 0).$$

Тогда ветви логарифмов для ρ_3, σ_3 должны быть согласованы и выбираются из условия

$$\rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = \rho_3 + \sigma_3.$$

Пусть C_k $(k = 1,2,3)$ — матрицы, приводящие матрицы A_k к нормальной жордановой форме:

$$G_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \beta_k \end{pmatrix}, \text{ если } \alpha_k \ne \beta_k$$

и

$$G_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 1 & \alpha_k \end{pmatrix}, \text{ если } \alpha_k = \beta_k.$$

Матрицы $B_k = \ln A_k$ могут быть найдены по формулам

$$B_k = C_k \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} C_k^{-1}, \text{ если } \rho_k \ne \sigma_k$$

и

$$B_k = C_k \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 1/\alpha_k & \rho_k \end{pmatrix} C_k^{-1} = C_k \begin{pmatrix} 1/\alpha_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 1 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_k^{-1}, \text{ если } \rho_k = \sigma_k.$$

Найдём матрицы M_1 и M_2, удовлетворяющие равенству

$$M_1 B_1 M_1^{-1} + M_2 B_2 M_2^{-1} = B_3 \tag{1}$$

Приводя матрицу B_3 к нормальной жордановой форме, перепишем (1) в виде

$$C_3^{-1}M_1B_1M_1^{-1}C_3 + C_3^{-1}M_2B_2M_2^{-1}C_3 = C_3^{-1}B_3C_3$$

или

$$S_1 + S_2 = C_3^{-1}B_3C_3. \tag{2}$$

Пусть $\rho_3 \neq \sigma_3$. Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} s_1 & c \\ d & \rho_1 + \sigma_1 - s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -c \\ -d & \rho_2 + \sigma_2 - s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Получили систему из четырёх уравнений

$$s_1 + s_2 = \rho,$$
$$\rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 - s_1 - s_2 = \sigma,$$
$$s_1(\rho_1 + \sigma_1 - s_1) - cd = \rho_1\sigma_1,$$
$$s_2(\rho_2 + \sigma_2 - s_2) - cd = \rho_2\sigma_2,$$

решая которую находим элементы матриц

$$S_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)}{\sigma_3 - \rho_3} & \dfrac{(\rho - \rho_1)(\sigma - \sigma_1) - \rho_2\sigma_2}{(\sigma_3 - \rho_3)d} \\ d & \dfrac{\rho_2\sigma_2 - (\sigma_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}{\sigma_3 - \rho_3} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_2\sigma_2 - (\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \sigma_1)}{\sigma_3 - \rho_3} & \dfrac{\rho_2\sigma_2 - (\rho_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}{(\sigma_3 - \rho_3)d} \\ -d & \dfrac{\rho_1\sigma_1 - (\sigma_3 - \rho_2)(\sigma_3 - \sigma_2)}{\sigma_3 - \rho_3} \end{pmatrix}, \tag{3'}$$

где d — произвольное число. Если матрица C_3 приводит A_1 и A_2 к треугольному виду, то формулы упрощаются, т. к. в этом случае $cd = 0$.

Обозначим N_k матрицы, приводящие матрицы S_k $(k = 1, 2)$ к жордановым формам, т. е.

$$S_1 = N_1G_1N_1^{-1},\ S_2 = N_2G_2N_2^{-1}.$$

С одной стороны,

$$S_k = C_3^{-1}M_kB_kM_k^{-1}C_3.$$

С другой стороны,

$$S_k = N_kG_kN_k^{-1} = N_kC_k^{-1}(C_kG_kC_k^{-1})C_kN_k^{-1} = = N_kC_k^{-1}B_kC_kN_k^{-1}.$$

Следовательно, искомые матрицы M_1 и M_2 можно найти по формулам:

$$M_k = C_3N_kC_k^{-1},\ k = 1, 2.$$

Если $\rho_3 = \sigma_3$, то равенство (2) можно переписать в виде

$$S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 1/\alpha_3 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} s_1 & c \\ d & \rho_1 + \sigma_1 - s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -c \\ 1/\alpha_3 - d & \rho_2 + \sigma_2 - s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 1/\alpha_3 & \rho_3 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений

$$s_1 + s_2 = \rho_3,$$
$$s_1(\rho_1 + \sigma_1 - s_1) - cd = \rho_1\sigma_1,$$
$$s_2(\rho_2 + \sigma_2 - s_2) - cd + \frac{c}{\alpha_3} = \rho_2\sigma_2,$$

откуда находим

$$S_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{s}{\dfrac{(s-\rho_1)(s-\sigma_1)}{\alpha_3\left(\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)\right)}} & \dfrac{\alpha_3\left((\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2) - \rho_1\sigma_1\right)}{\rho_1 + \sigma_1 - s} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_3 - s}{\dfrac{1}{\alpha_3}\left(1 - \dfrac{(s-\rho_1)(s-\sigma_1)}{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)}\right)} & \dfrac{\alpha_3\left(\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)\right)}{\rho_2 + \sigma_2 - \rho_3 + s} \end{pmatrix}, \quad (4')$$

где s — произвольное число.

Если N_k $(k = 1,2)$ — матрицы, приводящие матрицы S_k к жордановой форме, то искомые матрицы M_k можно найти по формулам

$$\begin{aligned} M_k &= C_3 N_k C_k^{-1}, \text{ если } \rho_k \neq \sigma_k \text{ и} \\ M_k &= C_3 N_k \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_k^{-1}, \text{ если } \rho_k = \sigma_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Применяя формулу (1) несколько раз подряд, можно найти представление логарифма произведения любого числа матриц.

Пусть A_1, A_2, A_3 — постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка неперестановочные в совокупности,

$$A_4 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Обозначим α_k, β_k $(k = \overline{1,4})$ характеристические числа матриц A_k, α_{23}, β_{23} — характеристические числа матрицы $A_2 \cdot A_3$ и найдём числа

$$\rho_k = \ln\alpha_k,\ \sigma_k = \ln\beta_k,\ \rho_{23} = \ln\alpha_{23},\ \sigma_{23} = \ln\beta_{23},$$

где

$$\sum_{k=1}^{3}(\rho_k + \sigma_k) = \rho_4 + \sigma_4,\ \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3 = \rho_{23} + \sigma_{23}.$$

С помощью формулы (1) запишем представление

$$\ln(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = M_1 \ln A_1 M_1^{-1} + M_{23} \ln(A_2 \cdot A_3) M_{23}^{-1} =$$
$$= M_1 \ln A_1 M_1^{-1} + M_{23}(M_2' \ln A_2 M_2'^{-1} + M_3' \ln A_3 M_3'^{-1}) =$$
$$= M_1 \ln A_1 M_1^{-1} + M_{23} M_2' \ln A_2 \cdot (M_{23} M_2')^{-1} + M_{23} M_3' \ln A_3 (M_{23} M_3')^{-1} =$$
$$= M_1 \ln A_1 M_1^{-1} + M_2 \ln A_2 \cdot M_2^{-1} + M_3 \ln A_3 M_3^{-1},$$

где

$$M_2 = M_{23} \cdot M_2', \; M_3 = M_{23} \cdot M_3',$$

а элементы матриц M_k $(k = 1, 2, 3)$, M_{23} можно найти по формулам (5), где в формулах (3) или (4) заменяем:

для M_1 — ρ_2, σ_2 на ρ_{23}, σ_{23}, а ρ_3, σ_3 на ρ_4, σ_4;

для M_2' — ρ_1, σ_1 на ρ_2, σ_2, а ρ_2, σ_2 на ρ_3, σ_3 и ρ_3, σ_3 на ρ_{23}, σ_{23},

и в формулах (3′) или (4′)

для M_{23} — ρ_1, σ_1 на ρ_2, σ_2, а ρ_2, σ_2 на ρ_3, σ_3 и ρ_3, σ_3 наρ_4, σ_4;

для M_3' — ρ_1, σ_1 на ρ_2, σ_2, а ρ_2, σ_2 на ρ_3, σ_3 и ρ_3, σ_3 на ρ_{23}, σ_{23}.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.