УДК 517.925.7

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГРУППОЙ МОНОДРОМИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ТРЕМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Л.А. Хвощинская
Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск, ludmila.ark@gmail.com

Аннотация: Построено решение проблемы Римана для системы трех аналитических функций с заданной группой монодромии и тремя особыми точками. Построена каноническая матрица задачи. Решение проблемы выражено через решения дифференциального уравнения класса Фукса третьего порядка с тремя особыми точками. Параметры дифференциального уравнения найдены в явном виде.

Ключевые слова: проблема Римана, группа монодромии, каноническая матрица. дифференциальное уравнение класса Фукса.

CONSTRUCTION OF A DIFFERENTIAL EQUATION WITH A THIRD-ORDER MONODROMY GROUP AND THREE SIngular POINTS

L.A. Khvostchinskaya
Belarusian State Agrarian Technical University, Republic of Belarus, Minsk, ludmila.ark@gmail.com

Annotation: It is constructed a solution the problem of Riemann for a system of three analytic functions with a given monodromy group and three singular points. The canonical matrix of the problem was constructed. The solution is expressed through solutions of a third-order Fuchs class differential equation with three singular points. All parameters of the differential equation are found explicitly.

Keywords: Riemann problem, monodromy group, canonical matrix, Fuchs class differential equation.

Задача определения системы аналитических функций по заданной группе монодромии поставлена Б.Риманом еще в 1857 году [1]. В течение многих лет решением проблемы Римана занимались Гильберт, Племель, Карлерман, Гахов, Мусхелишвили, Векуа, Лаппо-Данилевский, Еругин, Болибрух и др. [2]. Решение проблемы остается актуальным в связи с приложениями в гидромеханике, электростатике, теории упругости, теории конформных отображений и др. Несмотря на то, что с момента постановки проблемы Римана прошло более 160 лет, до конца она не решена.

В 2015 году для системы двух функций предложен «метод логарифмирования произведения матриц», который оказался эффективным при решении задачи с произвольным числом особых точек [3, 4]. Для того, чтобы распространить этот метод на систему трех и большего числа функций, построим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет система трех функций с тремя особыми точками, в качестве которых можно взять точки $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty$.

Рассмотрим следующую задачу: найти систему трех функций $Y(z) = (y_1, y_2, y_3)$, аналитических в комплексной плоскости C, за исключением трех точек $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty$, при обходе вокруг которых функция $Y(z)$ испытывает линейные преобразования с помощью постоянных невырожденных матриц V_1, V_2, V_3 третьего порядка, образующих группу монодромии, $V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = E$. Для определенности будем искать решение задачи в классе функций, почти ограниченных (т.е. допускающих логарифмическую особенность) при $z \to a_k$, $k = 1, 2, 3$.

Обозначим характеристические числа матриц V_k через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, k = 1, 2, 3$, и найдем числа

$\rho_k = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k,\ \sigma_k = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\beta_k,\ \omega_k = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\gamma_k,\ \ k = 1,2,3;$

$\operatorname{Re}\rho_k, \operatorname{Re}\sigma_k, \operatorname{Re}\omega_k \in [0,1),\qquad \operatorname{Re}\rho_3 \le \operatorname{Re}\sigma_3 \le \operatorname{Re}\omega_3,$

$s_k = \rho_k + \sigma_k + \omega_k,\quad r_k = \rho_k\sigma_k + \sigma_k\omega_k + \rho_k\omega_k,\quad \sum_{k=1}^{3}(\rho_k + \sigma_k + \omega_k) = \sum_{k=1}^{3} s_k = 3.$

Рассмотрим матрицу $X_0(z) = \begin{pmatrix} y_1 & z(z-1)y_1' & z^2(z-1)^2 y_1'' \\ y_2 & z(z-1)y_2' & z^2(z-1)^2 y_2'' \\ y_3 & z(z-1)y_3' & z^2(z-1)^2 y_3'' \end{pmatrix}$, столбцы которой также являются решениями задачи и принадлежат выбранному классу функций. Составим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dX_0}{dz} = X_0 U_0(z), \tag{1}$$

которому удовлетворяет матрица $X_0(z)$. Представив функции y_1, y_2, y_3 в окрестности каждой особой точки в виде рядов, находим матрицу

$$X_0^{-1}\frac{dX_0}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p^2 M_1/M_4 \\ 1/p & p'/p & -pM_2/M_4 \\ 0 & 1/p & M_3/M_4 + 2p'/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_1(z) \\ 1/p & p'/p & \varphi_2(z) \\ 0 & 1/p & \varphi_3(z) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где введены обозначения $p = z(z-1)$, а $M_k, k = 1,\ldots,4,$ – миноры к -м элементам первой строки матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_1' & y_1'' & y_1''' \\ y_2 & y_2' & y_2'' & y_2''' \\ y_3 & y_3' & y_3'' & y_3''' \end{pmatrix}$. Применим к (2) теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля. Для этого найдем главные части разложений функций $\varphi_k(z), k = 1,2,3$, в окрестности каждой особой точки и их суммы. Тогда $\varphi_1(z) = \dfrac{\rho_1\sigma_1\omega_1}{z} + \dfrac{\rho_2\sigma_2\omega_2}{z-1} - \rho_3\sigma_3\omega_3 z + q$, $\varphi_2(z) = \dfrac{s_1 - r_1 - 1}{z} + \dfrac{s_2 - r_2 - 1}{z-1} - (s_3 + r_3 + 1)$, $\varphi_3(z) = \dfrac{s_1 - 1}{z} + \dfrac{s_2 - 1}{z-1}$, q - некоторая постоянная, а матрица $U_0(z)$ имеет вид

$$U_0(z) = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_1\sigma_1\omega_1 \\ -1 & 1 & s_1 - r_1 - 1 \\ 0 & -1 & s_1 - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_2\sigma_2\omega_2 \\ 1 & 1 & s_2 - r_2 - 1 \\ 0 & 1 & s_2 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho_3\sigma_3\omega_3 z + q \\ 0 & 0 & -(s_3 + r_3 + 1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что матрица $X_0(z)$ не является решением регулярной системы дифференциальных уравнений. Причина этого в том, что порядок p определителя этой матрицы не равен сумме порядков p_1, p_2, p_3 ее столбцов: $\operatorname{Re}(\rho_3 + \sigma_3 + \omega_3 - 3) \ne \operatorname{Re}\rho_3 + \operatorname{Re}(\rho_3 - 1) + \operatorname{Re}(\rho_3 - 2)$. Рассмотрим матрицу

$$X(z) = X_0(z)\begin{pmatrix} 1 & P_1(z) & P_2(z) \\ 0 & 1 & P_3(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X_0(z)\,P(z),$$

где $P_1(z), P_2(z), P_3(z)$- многочлены степени не выше двух, коэффициенты которых подбираются таким образом, чтобы столбцы матрицы $X(z)$ имели соответственно

порядки $p_1 = \operatorname{Re}\rho_3, p_2 = \operatorname{Re}(\sigma_3 - 1), p_3 = \operatorname{Re}(\omega_3 - 2)$. Непосредственные вычисления показывают, что в качестве многочленов можно выбрать функции
$P_1(z) = \rho_3 z,\quad P_2(z) = \rho_3\sigma_3 z^2 + \rho_3(\rho_3 - \sigma_3 + 1)z,\quad P_3(z) = (\rho_3 + \sigma_3 + 1)z$.

Таким образом, матрица $X(z)$ имеет вид

$$X(z) = \begin{pmatrix} y_1 & z(z-1)y_1' & z^2(z-1)^2 y_1'' \\ y_2 & z(z-1)y_2' & z^2(z-1)^2 y_2'' \\ y_3 & z(z-1)y_3' & z^2(z-1)^2 y_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_3 z & \rho_3 z(\sigma_3 z + \rho_3 - \sigma_3 + 1) \\ 0 & 1 & (\rho_3 + \sigma_3 + 1)z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Элементы матрицы $X(z)$ удовлетворяют всем условиям канонической матрицы [5] :
1) $\det X(z) \neq 0$ для $\forall z \neq a_k$ $(k = 1,2,3)$; 2) столбцы матрицы $X(z)$ принадлежат выбранному классу функций; 3) порядок определителя $X(z)$ равен сумме порядков его столбцов.

Подставив $X_0(z) = X(z)P^{-1}(z)$ в уравнение (1), получим $\dfrac{dX}{dz}P^{-1} + X\dfrac{dP}{dz} = XP^{-1}U_0$ или $\dfrac{dX}{dz} = X\left(P^{-1}U_0P - \dfrac{dP}{dz}P\right)$. Преобразуя последнее уравнение, заключаем, что каноническая матрица $X(z)$ является решением дифференциального уравнения класса Фукса вида

$$\frac{dX}{dz} = X\left(\frac{U_1}{z - a_1} + \frac{U_2}{z - a_2}\right), \tag{5}$$

где $U_1 = \left(u_{ij}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_1\sigma_1\omega_1 \\ -1 & 1 & 1 - s_1 + r_1 \\ 0 & -1 & s_1 - 1 \end{pmatrix}$,

$$U_2 = \left(u_{ij}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -\rho_3 & \rho_3(\sigma_3 - \rho_3 - 1) & \rho_2\sigma_2\omega_2 - \rho_3\left[(1-\sigma_3)(\rho_3 + s_2) + (\rho_3 + \sigma_3)(\rho_3 - \sigma_3 + 1) - r_2\right] \\ 1 & -\sigma_3 & \rho_3(1 - \sigma_3) - (\rho_3 + \sigma_3)(\sigma_3 + s_2) - r_2 \\ 0 & 1 & \rho_3 + \sigma_3 + s_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица $U_1 + U_2$ является треугольной, на главной диагонали которой стоят числа $-\rho_3, 1 - \sigma_3, 2 - \omega_3$. Систему (5) сведем к одному дифференциальному уравнению третьего порядка. Учитывая формулу (4) для матрицы $X(z)$, приравняем элементы матриц, стоящие слева и справа уравнения (5) в первой строке и третьем столбце:

$$\left(y_1P_2(z) + p(z)y_1'P_3(z) + p^2(z)y_1''\right)' = y_1\left(\frac{u_{13}^{(1)}}{z} + \frac{u_{13}^{(2)}}{z-1}\right) + \left(y_1P_1(z) + p(z)y_1'\right)\left(\frac{u_{23}^{(1)}}{z} + \frac{u_{23}^{(2)}}{z-1}\right) +$$
$$\left(y_1P_2(z) + p(z)y_1'P_3(z) + p^2(z)y_1''\right)\left(\frac{u_{33}^{(1)}}{z} + \frac{u_{33}^{(2)}}{z-1}\right).$$

Аналогичные уравнения получаем и для функций y_2, y_3. Поэтому далее индекс функции y_1 убираем. Все три y_1, y_2, y_3 функции являются фундаментальной системой решений дифференциального уравнения третьего порядка

$$p^2(z)y''' + p^2(z)\left(-\frac{u_{33}^{(1)}}{z} - \frac{u_{33}^{(2)}}{z-1} + \frac{P_3(z)+2p'(z)}{p(z)}\right)y'' - p(z)\left(P_3(z)+2p'(z)\right)y'' +$$

$$\left(\frac{u_{23}^{(1)}}{z} + \frac{u_{23}^{(2)}}{z-1} + P_3(z)\left(\frac{u_{33}^{(1)}}{z} + \frac{u_{33}^{(2)}}{z-1}\right) - \frac{P_2(z)+p(z)P_3'(z)+p'(z)P_3(z)}{p(z)}\right)y' +$$

$$\left(P_2'(z) - \frac{u_{13}^{(1)}}{z} - \frac{u_{13}^{(2)}}{z-1} - P_1(z)\left(\frac{u_{23}^{(1)}}{z} + \frac{u_{23}^{(2)}}{z-1}\right) - P_2(z)\left(\frac{u_{33}^{(1)}}{z} + \frac{u_{33}^{(2)}}{z-1}\right)\right)y = 0\,,$$

которое после преобразований примет вид

$$y''' + \left(\frac{3-s_1}{z} + \frac{3-s_2}{z-1}\right)y'' + \frac{1}{z(z-1)}\left(r_3 + s_3 + 1 + \frac{s_1-r_1-1}{z} + \frac{s_2-r_2-1}{z-1}\right)y' +$$

$$+\frac{1}{z^2(z-1)^2}\left[\rho_3\sigma_3\omega_3 z + \omega_1\left(r_2 - r_1 - (1-\rho_3)(s_1+\rho_3) + (1-\sigma_3)(\omega_3-2)\right) - \frac{\rho_1\sigma_1\omega_1}{z} - \frac{\rho_2\sigma_2\omega_2}{z-1}\right]y = 0 \quad (6).$$

Уравнение (6) можно упростить, используя схему Римана:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \to z^{\rho_1}(z-1)^{\rho_2} P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \rho_3+\rho_1+\rho_2 \\ \sigma_1-\rho_1 & \sigma_2-\rho_2 & \sigma_3+\rho_1+\rho_2 \\ \omega_1-\rho_1 & \omega_2-\rho_2 & \omega_3+\rho_1+\rho_2 \end{pmatrix}.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема. Решение проблемы Римана с группой монодромии V_1, V_2, V_3 третьего порядка в окрестности каждой особой точки a_k ($k = 1,2,3$) имеет вид $Y(z) = D_k X(z)$, где D_k – матрица, приводящая матрицу V_k к нормальной жордановой форме, $X(z)$ - матрица (4), в которой функции y_1, y_2, y_3 являются фундаментальной системой решений дифференциального уравнения (6).

Библиографический список

1. Риман Б. Сочинения. М.-Л.: ОГИЗ. Гостехиздат. 1948. 543 с.
2. Еругин Н.П. Проблема Римана. Мн.: Наука и техника. 1982. 336 с.
3. Хвощинская Л.А. О применении логарифмирования произведения матриц к решению проблемы Римана // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-28: сб. тр. XXVIII Междунар. науч. конф. Т. 7. – Рязань. 2015. С. 28 – 31.
4. Хвощинская Л.А. Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана // Матер. междунар. семнадцатой науч. конф. им. акад. М. Кравчука, 19–20 мая 2016. Т.1. Киев: НТУУ «КПИ». 2016. С. 263–266.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука. 1977. 448 с.