ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление
Минск, Беларусь, 16-20 февраля 1996г.

PROCEEDINGS of INTERNATIONAL CONFERENCE
Boundary Value Problems, Special Functions and Fractional Calculus
Minsk, Belarus, February 16-20 1996

К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек

Л.А. Хвощинская (Минск, Беларусь)

В 1857 г. Б. Риман поставил свою знаменитую проблему определения системы аналитических функций $y_1(z),\dots, y_m(z)$, которая при обходе вокруг особых точек $a_1,\dots,a_n$ испытывает линейное преобразование с помощью постоянных невырожденных матриц $A_1,\dots A_n$, образующих группу монодромии [1]. В первоначальной постановке проблемы Римана существует неопределенность, так как решение проблемы в этом случае зависит не только от точек $a_1,\dots,a_n$ и матриц $A_1,\dots A_n$, но и от выбора ветвей логарифмов. В дальнейшем под проблемой Римана будем понимать проблему определения более узкого класса функций, для которых ветвь логарифма может быть выбрана однозначно.

Проблема Римана, как известно, тесно связана с краевой задачей Римана теории аналитических функций. Проводя через точки $a_1,\dots,a_n$ простой замкнутый контур, приходим к краевому условию

$$Y^+(t) = A_k^* Y^-(t),\ t \in a_k \smile a_{k+1},\ k = 1,\dots,n,\ a_{n+1} = a_1, \tag{1}$$

где $A_k^* = (A_1 \dots A_k)^{-1}$, $A_n^* = E$.

Решение задачи можно искать в каком-либо выбранном классе Мусхелишвили.

Пусть $m=2$, а в качестве особых точек возьмем точки $a_1,\dots,a_n,\infty$. Рассмотрим задачу определения системы аналитических функций $\Phi(z)=(\Phi_1,\Phi_2)$ по краевому условию

$$\Phi^+(t) = A_k \Phi^-(t),\ t \in a_k \smile a_{k+1},\ k = 1,\dots,n,\ a_{n+1} = \infty. \tag{2}$$

Для матриц 2-го порядка в случае двух и трех особых точек решение задачи (2) строится довольно просто. Оно выражается через элементарные и гипергеометрические функции [2]. Отметим, однако, что в [2] неудачно выбраны ветви логарифмов, и на это указано Ю.В. Обносовым в [3]. Эти замечания учтены в настоящей работе.

В случае четырех и большего числа особых точек для задачи (2) построена каноническая матрица и найдена картина разрешимости. Полученное решение зависело от $(5n-2)$ параметров, из которых $2(n+2)$ выражались явно, а для оставшихся $3(n-2)$ параметров составлялась система из $2(n-2)$ трансцендентных и $(n-2)$ алгебраических уравнений [2].

Покажем, что число параметров, входящих в решение задачи (2) и подлежащих дальнейшему определению, можно уменьшить на $(n-2)$.

Для простоты изложения положим $n=3$.

Решение задачи (2) будем искать в классе функций, интегрируемых при $z \to a_k$ $(k=1,2,3)$ и почти ограниченных при $z \to \infty$.

Обозначим характеристические числа матриц $A_{k-1}A_k^{-1}$ $(k = \overline{1,4})$, $A_0=A_4=E$, через α_k и β_k. Введем обозначения

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} ln\alpha_k, \quad -1 < Re\rho_k \le 0, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i} ln\beta_k, \quad -1 < Re\sigma_k \le 0,$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{4}\left(\rho_k + \sigma_k\right), \qquad \Delta \text{ – целое}, \qquad -7 \le \Delta \le 0.$$

Пусть $\Phi(z) = (y_1(z), y_2(z))$ – какое-либо решение задачи (2), имеющее максимально возможный порядок p_1 на бесконечности. Можно показать, что в окрестности каждой особой точки это решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} U_k(z) \\ V_k(z) \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} (z-a_k)^{\rho_k}\tilde{u}_k(z) \\ (z-a_k)^{\sigma_k}\tilde{v}_k(z) \end{pmatrix}, \quad k=1,2,3; \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_4 \begin{pmatrix} U_4(z) \\ V_4(z) \end{pmatrix} = D_4 \begin{pmatrix} z^{-\rho_\infty}\tilde{u}_4(z) \\ z^{-\sigma_\infty}\tilde{v}_4(z) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где D_k – матрицы, приводящие матрицы $A_{k-1}A_k^{-1}$ к жордановой форме, функции $\tilde{u}_k(z)$ $\left(k = \overline{1,4}\right)$ – голоморфны в окрестностях точек a_k, а $\tilde{v}_k(z)$ либо голоморфны в окрестностях a_k, либо имеют вид

$$\tilde{v}_k(z) = \frac{1}{2\pi i} ln(z-a_k)\tilde{u}_k(z) + \tilde{w}_k(z) \qquad \text{при} \qquad \rho_k = \sigma_k \ (k = 1,2,3),$$

$$\tilde{v}_4(z) = -\frac{1}{2\pi i} ln z\tilde{u}_4(z) + \tilde{w}_4(z) \qquad \text{при} \qquad \rho_4 = \sigma_4$$

и $\tilde{w}_k(z)$ $\left(k = \overline{1,4}\right)$ – голоморфны в окрестностях точек a_k, $\tilde{u}_k(a_k) \ne 0$, $\tilde{v}_k(a_k) \ne 0$, $\tilde{w}(a_k) \ne 0$;

$$\rho_\infty = \rho_4 + k_1, \qquad \sigma_\infty = \sigma_4 + k_2,$$

а целые числа k_1 и k_2 подбираются из условия

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\rho_k + \sigma_k\right) + \rho_\infty + \sigma_\infty = 1 \tag{4}$$

или $k_1 + k_2 = 1 - \Delta$.

Очевидно, что решение $\Phi(z)$ будет иметь максимальный возможный порядок на бесконечности, если $k_1 = \left[\frac{2-\Delta}{2}\right]$, $k_2 = \left[\frac{1-\Delta}{2}\right]$ в случае $Re\rho_4 \le Re\sigma_4$ и $k_1 = \left[\frac{1-\Delta}{2}\right]$, $k_2 = \left[\frac{2-\Delta}{2}\right]$ в случае $\operatorname{Re}\rho_4 \ge \operatorname{Re}\sigma_4$. Тогда $p_1 = min\{Re\rho_\infty, Re\sigma_\infty\}$.

Система функций

$$\left(\prod_{k=1}^{3}(z-a_k)y_1', \prod_{k=1}^{3}(z-a_k)y_2'\right)$$

также является решением задачи (2) и имеет на бесконечности порядок $p_1 - 2$.

Рассмотрим систему функций

$$\left(y_1^*, y_2^*\right) = \left(\frac{\prod_{k=1}^{3}(z-a_k)y_1' - qy_1}{z-b}, \frac{\prod_{k=1}^{3}(z-a_k)y_2' - qy_2}{z-b}\right), \tag{5}$$

где q и b – некоторые числа, $b \ne a_k$ $(k=1,2,3)$. Вектор-функция (5) удовлетворяет краевому условию (2) и будет голоморфной в точке $z=b$ при выполнении условий

$$y_j(b)q = \prod_{k=1}^{3}(b - a_k)y_j'(b), \quad j = 1,2 \tag{6}$$

Для этого достаточно потребовать, чтобы функция $y_2(z)$ в точке $z=b$ имела ноль второго порядка. Тогда параметр q можно найти по первой из формул (6).

Порядок p_2^* функции (5) равен: $p_2^* = p_1 - 1$.

Матрица $X^*(z) = \begin{pmatrix} y_1 & y_1^* \\ y_2 & y_2^* \end{pmatrix}$ является нормальной, но не является канонической.

Рассмотрим матрицу

$$X(z) = X^*(z)\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{где } \varepsilon = \begin{cases} \rho_\infty, & \text{если} \quad Re\rho_\infty \le Re\sigma_\infty, \\ \sigma_\infty, & \text{если} \quad Re\rho_\infty \ge Re\sigma_\infty. \end{cases}$$

Порядок p_2 второго столбца матрицы $X(z)$ равен

$$p_2 = max\{Re\rho_\infty, Re\sigma_\infty\} - 1.$$

Матрица $X(z)$ обладает следующими свойствами:

1) элементы $X(z)$ принадлежат выбранному классу;

2) $\det X(z) \ne 0$ всюду в $C \setminus \bigcup_{k=1}^{3}\{a_k\}$;

3) порядок p определителя матрицы $X(z)$ равен сумме порядков ее столбцов, т.к. $p = \rho_\infty + \sigma_\infty - 1 = p_1 + p_2$.

Следовательно, матрица $X(z)$ является канонической. [4].

Составим систему ДУ, которой удовлетворяет матрица $X(z)$.

Для простоты вычислений составим сначала систему ДУ для матрицы

$$X_0(z) = \begin{pmatrix} y_1 & \dfrac{p(z)}{z-b} y_1' \\ y_2 & \dfrac{p(z)}{z-b} y_2' \end{pmatrix}, \text{где } p(z) = \prod_{k=1}^{3}(z - a_k).$$

Подставляя матрицу $X_0(z)$ *в краевое условие (2), дифференцируя его на* каждом из участков $a_k \smile a_{k+1}$ $(k = 1,2,3)$ и исключая матрицы A_k, получим краевое условие

$$\left[X_0^{-1}\frac{dX_0}{dt}\right]^+ = \left[X_0^{-1}\frac{dX_0}{dt}\right]^-. \tag{7}$$

Рассмотрим матрицу

$$X_0^{-1}(z)\frac{dX_0(z)}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{p(z)}{z-b}\dfrac{y_2'y_1'' - y_1'y_2''}{y_1y_2' - y_2y_1'} \\ \dfrac{z-b}{p(z)} & \dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{1}{z-b} + \dfrac{y_1y_2'' - y_2y_1''}{y_1y_2' - y_2y_1'} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Учитывая представление (3), нетрудно показать, что элементы матрицы (8) аналитичны всюду в C, за исключением точек a_1, a_2, a_3, b, где они имеют полюсы.

Применяя теперь к (7) теорему об аналитическом продолжении и обобщённую теорему Лиувилля, получим

$$\frac{dX_0}{dz} = X_0 \begin{pmatrix} 0 & -\sum_{k=1}^{3} \rho_k \sigma_k \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3} \frac{a_k - a_j}{(a_k - b)(z - a_k)} - \frac{q}{(z-b)^2} + \frac{\gamma}{z-b} - \rho_\infty \sigma_\infty \\ \frac{z-b}{p(z)} & \sum_{k=1}^{3} \frac{\rho_k + \sigma_k}{z - a_k} \end{pmatrix} \qquad (8^*)$$

причем $\sum_{k=1}^{3} (\rho_k + \sigma_k) + \rho_\infty + \sigma_\infty - 1 = 0$, что совпадает с соотношением (4).

Подставляя в (8*) $X_0(z) = X(z)\begin{pmatrix} 1 & q(z-b)^{-1} - \varepsilon z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, получим регулярную систему ДУ, которой удовлетворяет каноническая матрица $X(z)$:

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=1}^{3} \frac{U_k}{z - a_k},$$

где

$$U_k = \begin{pmatrix} -\eta_k & \frac{(\eta_k + \rho_k)(\eta_k + \sigma_k)}{(b - a_k)\omega_k} \\ (a_k - b)\omega_k & \eta_k + \rho_k + \sigma_k \end{pmatrix}, \qquad \omega_k = 1 \Big/ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3} (a_k - a_j), \quad \eta_k = [\varepsilon a_k (a_k - b) - q]\omega_k.$$

Система (9) сводится к ДУ вида

$$y'' + \left[\sum_{k=1}^{3} \frac{1 - \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \frac{1}{z-b} \right] y' + \frac{z-b}{\prod_{k=1}^{3}(z - a_k)} \times$$

$$\times \left[\frac{q}{(z-b)^2} + \frac{q}{z-b}\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\rho_k + \sigma_k}{b - a_k} - \frac{q}{\prod_{k=1}^{3}(b - a_k)} \right) + \rho_\infty \sigma_\infty + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \sigma_k \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3} \frac{a_k - a_j}{(a_k - b)(z - a_k)} \right] y = 0$$

Уравнение (10) – это ДУ класса Фукса с пятью особыми точками a_1, …, b, ∞, причем точка $z=b$ является регулярной. Это уравнение содержит 8 известных и 2 неизвестных параметра – q и b. Составим уравнения для нахождения параметров q и b.

Выберем параметры q и b так, чтобы локальные решения (3) были аналитическими продолжениями друг друга, т.е. выполнялись равенства

$$D_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = D_{k+1} \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3.$$

Нетрудно установить, что произвольная матрица D_k, приводящая матрицу $A_{k-1}A_k^{-1}$ к жордановой форме, имеет вид

$$D_k = \tilde{D}_k T_k, \quad T_k = \begin{pmatrix} \gamma_k & 0 \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix} \text{ при } \alpha_k \neq \beta_k \text{ и } T_k = \begin{pmatrix} \gamma_k & 0 \\ \delta_k & \gamma_k \end{pmatrix}, \text{ при } \alpha_k = \beta_k, \ k = \overline{1,4} \quad (12)$$

где $\tilde{D}_k$ – постоянная невырожденная матрица, приводящая $A_{k-1}A_k$ к жордановой форме, а γ_k, σ_k – некоторые числа.

С другой стороны, в окрестности каждой особой точки имеют место соотношения

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \Lambda_k \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3. \quad (13)$$

где $\Lambda_k = \left(\lambda_{ij}^{(k)}\right)$ – постоянные невырожденные матрицы, элементы которых выражаются через функции u_k, v_k, u_{k+1}, v_{k+1} и их производные в фиксированной точке, причем значения их справа и слева от контура различны.

Подставляя (12) и (13) в (11), приходим к трем матричным уравнениям

$$T_k \Lambda_k = S_k T_{k+1}, \quad \text{где} \quad S_k = \left(s_{ij}^{(k)}\right) = \tilde{D}_k^{-1} \tilde{D}_{k+1}, \quad k = 1,2,3,$$

которые дают систему 12-ти уравнений для определения γ_k, σ_k ($k=1,2,3$). Условия совместности этой системы дают 5 уравнений для определения q и b, из которых лишь два являются независимыми.

Установлено, что параметры q и b можно найти, решив систему двух уравнений вида

$$\frac{det\Lambda_k}{detS_k} = \frac{\lambda_{12}^{(k)}\lambda_{ij}^{(k)}}{s_{12}^{(k)}s_{ij}^{(k)}}, \quad k = 1,2, \quad (14)$$

где $i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_k = \beta_k, \\ 2, & \text{если } \alpha_k \neq \beta_k, \end{cases} \quad j = \begin{cases} 2, & \text{если } \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \\ 1, & \text{если } \alpha_{k+1} \neq \beta_{k+1}. \end{cases}$

Аналогичные построения производятся и в случае произвольного числа особых точек $a_1,\dots,a_n,\infty$.

Обозначим α_k, β_k – характеристические числа матриц $A_{k-1}A_k^{-1}$ $(k = 1,\dots,n+1)$, $A_0=A_{n+1}=E$. Находим числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} ln\alpha_k, \ -1 < Re\rho_k \leq 0, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\beta_k, \ -1 < Re\sigma_k \leq 0,$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\rho_k + \sigma_k\right), \quad \Delta \text{ – целое число, } -2n-1 \leq \Delta \leq 0,$$

$$\rho_\infty = \rho_{n+1} + \left[\frac{2-\Delta}{2}\right], \ \sigma_\infty = \sigma_{n+1} + \left[\frac{1-\Delta}{2}\right], \text{ если } Re\rho_{n+1} \leq Re\sigma_{n+1}$$

$$\rho_\infty = \rho_{n+1} + \left[\frac{1-\Delta}{2}\right], \ \sigma_\infty = \sigma_{n+1} + \left[\frac{2-\Delta}{2}\right], \text{ если } Re\rho_{n+1} \geq Re\sigma_{n+1}.$$

Нетрудно показать, что матрица

$$X(z) = \begin{pmatrix} y_1 & y_1^* \\ y_2 & y_2^* \end{pmatrix}, \qquad y_j^* = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)}{\prod\limits_{m=1}^{n-2}(z-b_m)} y_j' - \sum_{m=1}^{n-2}\frac{q_m}{z-b_m} y_j, \; j = 1,2,$$

где b_m, q_m $(m=1,...,n-2)$ – некоторые числа, а y_1, y_2 – фундаментальная система решений ДУ класса Фукса

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_k-\sigma_k}{z-a_k} - \sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{z-b_m}\right)y' +$$

$$+\frac{\prod\limits_{m=1}^{n-2}(z-b_m)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)}\left[\sum_{m=1}^{n-2}\frac{q_m}{z-b_m}\left(\frac{1}{z-b_m}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k+\sigma_k}{b_m-a_k} - q_m\frac{\prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n-2}(b_m-b_j)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(b_m-a_k)}\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k\sigma_k}{z-a_k}\frac{\prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n}(a_k-a_j)}{\prod\limits_{m=1}^{n-2}(a_k-b_m)} + \rho_\infty\sigma_\infty\right]y$$

является нормальной и простым преобразованием сводится к канонической.

Для определения параметров q_m, b_m $(m=1,...,n-2)$ составлена система $2(n-2)$ трансцендентных уравнений, аналогичных уравнениям (14).

Частными индексами χ_1, χ_2 задачи (2) назовем целые части от порядков столбцов матрицы $X(z)$ на бесконечности.

$$\chi_1 = \left[\frac{1-\Delta}{2}\right], \; 0 \le \chi_1 \le n+1, \; \chi_2 = \left[\frac{-\Delta}{2}\right], \; 0 \le \chi_2 \le n.$$

Так как $0 \le \chi_1 - \chi_2 \le 1$, то частные индексы устойчивы.

Суммарный индекс χ задачи (2) и число ℓ линейно независимых решений будут задаваться формулами:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 = -\Delta, \quad 0 \le \chi \le 2n+1, \quad \ell = \chi + 1, \quad 1 \le \ell \le 2n+2.$$

Аналогичный метод может быть использован при решении проблемы Римана с матрицами порядка ≥ 3.

Литература

1. Риман Б. Сочинения. М.-Л., 1948.
2. Хвощинская Л.А.// Деп. в ВИНИТИ, N2400-В93.
3. Обносов Ю.В.// Изв. вузов. Математика. 1994, N8, с.55-56.
4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения. М., 1977.