УДК 517

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИКИ

Л.А. Хвощинская*, Т.Н. Жоровина**

**Белорусский государственный аграрный технический университет,*
Беларусь, Минск, ludmila.ark@gmail.com
***Белорусский государственный университет,*
Беларусь, Минск, zhorovina@bsu.by

Аннотация. Рассмотрен метод решения задачи о фильтрации через основание плотины формы трапеции. Задача сведена к неоднородной краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками. Решение выражено через решения дифференциального уравнения класса Фукса, в котором удалось определить все параметры.

Ключевые слова: фильтрация, краевая задача Римана, дифференциальное уравнение класса Фукса.

CONSTRUCTING OF A DIFFERENTIAL EQUATION ONE PROBLEM OF HIDROMECHANICS

L.A. Khvoshchinskaya*, T.N. Zhorovina**

**Belarusian State Agrarian Technical University,*
Republic of Belarus, Minsk, ludmila.ark@gmail.com
***Belarusian State University,*
Republic of Belarus, Minsk, zhorovina@bsu.by

Annotation. Considered method of solving the problem of seepage through the dam foundation shap of a trapezoid. The problem is reduced to on nonhomogeneous boundary value problem of Riemann with a piecewise constant matrix and four singular points. The solution is expressed via the solution of a differential equation of Fuchs in which it was possible to defind all the parameters.

Keywords: filtration, the boundary value problem of Riemann, the differential equation of Fuchs class.

Решение ряда задач гидромеханики связано с решением краевых задач теории аналитических функций и дифференциальных уравнений [1 - 3].

В работе [1] задача о фильтрации двух жидкостей была сведена к скалярной обобщенной краевой задаче Римана с тремя особыми точками, и решение этой задачи получено в явном виде через гипергеометрические функции. В работе [3] рассмотрена задача о фильтрации через земляную плотину трапецеидального сечения, построенной на водонепроницаемом основании. Задача сведена к краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей второго порядка и четырьмя особыми точками. Решение этой задачи выражено через решения дифференциального уравнения класса Фукса, 2 параметра которого так и не удалось найти в явном виде. Цель настоящей работы – используя методы и результаты работ [4], [5], найти в явном виде все параметры дифференциального уравнения, через решения которого выражается решение задачи о фильтрации.

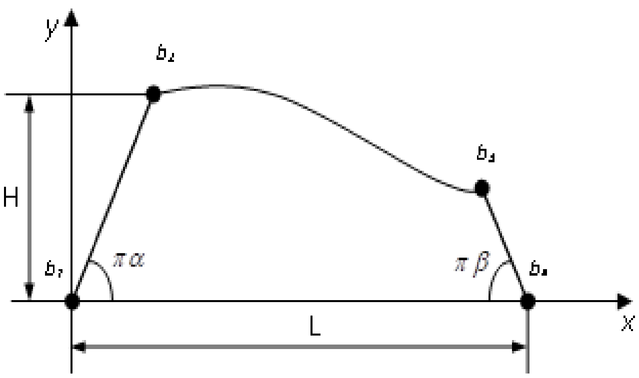

Рис. 1. Область течения жидкости через плотину на комплексной плоскости $z = x + iy$

Изобразим область течения жидкости через плотину на комплексной плоскости $z = x + iy$ (рис. 1), где H – глубина воды в верхнем бьефе, L – длина основания плотины, $\pi\alpha$, $\pi(1-\beta)$ – углы наклонов верхнего и нижнего откосов плотины. Введем приведенный комплексный потенциал $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – потенциал скорости, а $\psi(x, y)$ – функция тока, поделенные на коэффициент фильтрации.

Пусть при конформном отображении верхней полуплоскости $\xi = t + i\tau$ на области фильтрации z и комплексного потенциала ω точки b_1, b_2, b_3, b_4 переходят соответственно в точки a_1, a_2, a_3, a_4 действительной оси. Не ограничивая общности, будем считать $a_4 = \infty$.

Введем аналитическую вектор-функцию $\Phi(\xi) = (z, \omega)$.

Находя предельные значения $\Phi^{\pm}(t)$ функции $\Phi(\xi)$ сверху и снизу от действительной оси, приходим к краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками:

$$\Phi^{+}(t) = A_k \Phi^{-}(t) + F_k,\ a_k < t < a_{k+1},\ k = 1,2,3, \tag{1}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i\beta} & 0 \\ i(e^{-2\pi i\beta} - 1) & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F_1 = L(1 - e^{-2\pi i\beta})\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $F_2 = 2Q\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $F_3 = 2H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение задачи (1) ищем в классе функций, ограниченных при $\xi \to a_k$ $\left(k = \overline{1,4}\right)$.

Найдем матрицы V_1, V_2, V_3, V_4 группы монодромии, соответствующей задаче (1), и их характеристические числа λ_k, μ_k $\left(k = \overline{1,4}\right)$: $V_1 = A_1^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\beta} & 0 \\ i(e^{2\pi i\beta} - 1) & -1 \end{pmatrix}$,

$V_2 = A_1 \cdot A_2^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i\beta} & 2ie^{-2\pi i\beta} \\ i(e^{-2\pi i\beta} - 1) & 1 - 2e^{-2\pi i\beta} \end{pmatrix}$, $V_3 = A_2 \cdot A_3^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i\alpha} & 2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $V_4 = A_3 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 = e^{2\pi i\beta}$, $\mu_1 = -1$; $\lambda_2 = -e^{-2\pi i\beta}$, $\mu_2 = 1$; $\lambda_3 = e^{-2\pi i\alpha}$, $\mu_3 = -1$; $\lambda_4 = e^{2\pi i\alpha}$, $\mu_4 = -1$.

Далее находим числа $\rho_k = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\lambda_k$, $0 \le \operatorname{Re}\lambda_k < 1$, $\sigma_k = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\mu_k$, $0 \le \operatorname{Re}\mu_k < 1$, $k = \overline{1,4}$, $\rho_1 = \beta$, $\sigma_1 = 1/2$; $\rho_2 = 1/2 - \beta$, $\sigma_2 = 0$; $\rho_3 = 1 - \alpha$, $\sigma_3 = 1/2$; $\rho_4 = \alpha$, $\sigma_4 = 1/2$; $\Delta = \sum_{k=1}^{4}(\rho_k + \sigma_k) = 3$, $\rho = \rho_4 + \left[\dfrac{2-\Delta}{2}\right] = \alpha - 1$, $\sigma = \sigma_4 + \left[\dfrac{1-\Delta}{2}\right] = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$, $|\rho - \sigma| < 1$.

Числа ρ_k, σ_k, ρ, σ удовлетворяют соотношению Фукса: $\sum_{k=1}^{3}(\rho_k + \sigma_k) + \rho + \sigma = 1$. Тогда индекс æ и частные индексы æ1, æ2 задачи равны $æ = -\Delta = -3$, $æ_1 = [(1-\Delta)/2] = -1$, $æ_2 = [-\Delta/2] = -2$, т.е. для разрешимости неоднородной задачи (1) потребуется выполнение трех условий разрешимости, а решение будет единственным.

В работе [3] решение задачи (1) строится через решения дифференциального уравнения класса Фукса, соответствующего символу Римана

$$P\begin{pmatrix} a_k & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a \\ \rho_k & \beta & 1/2-\beta & 1-\alpha & \alpha-1 & 0 \\ \sigma_k & 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix},$$

где a – некоторая неизвестная точка, в окрестности которой второе решение фундаментальной системы решений (ф.с.р) дифференциального уравнения имеет нуль не первого, а второго порядка. В окрестности обычной регулярной точки показатели символа Римана равны 0 и 1. Это уравнение имеет вид

$$u'' + \left(\sum_{k=1}^{3}\frac{1-\rho_k-\sigma_k}{z-a_k} - \frac{1}{z-a}\right)u' + \left[\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\rho_k \cdot \sigma_k}{(z-a_k)^2} + \frac{c_k}{z-a_k}\right) + \frac{q}{z-a}\right]u = 0. \tag{2}$$

Параметры c_k $(k=1,2,3)$ выражены через ρ_j, σ_j $\left(j=\overline{1,4}\right)$, а акцессорные параметры q и a так и не были найдены. Для того, чтобы определить эти параметры, поступим следующим образом.

Найдем характеристические числа λ_{12}, μ_{12} и λ_{23}, μ_{23} матриц $V_{12}=V_1\cdot V_2=A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $V_{23}=V_2\cdot V_3=\begin{pmatrix}e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} & 0\\ ie^{-2\pi i\alpha}\left(e^{-2\pi i\beta}-1\right) & 1\end{pmatrix}$, $\lambda_{12}=\mu_{12}=1$, $\lambda_{23}=e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}$, $\mu_{23}=1$.

Ветви логарифмов чисел $\rho_{k,k+1}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\lambda_{k,k+1}$, $\sigma_{k,k+1}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\mu_{k,k+1}$ определим из условий $\rho_{12}+\sigma_{12}=\rho_1+\sigma_1+\rho_2+\sigma_2=1\Rightarrow\rho_{12}=0,\sigma_{12}=1$, $\rho_{23}+\sigma_{23}=\rho_2+\sigma_2+\rho_3+\sigma_3=2-\alpha-\beta\Rightarrow\rho_{23}=1-\alpha-\beta,\sigma_{23}=1$, $\left|\rho_{23}-\sigma_{23}\right|<1$.

Обозначим $W_k=\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k=\overline{1,4}$.

Построим каноническую матрицу $X(\xi)$ однородной задачи, соответствующей неоднородной задаче (1), которая удовлетворяет краевому условию $X^+(t)=A_kX^-(t)$, $a_k<t<a_{k+1}$, $k=1,2,3$.

Матрица $X(\xi)$ является решением регулярной системы дифференциальных уравнений класса Фукса

$$\frac{dX}{d\xi}=X\sum_{k=1}^{3}\frac{U_k}{\xi-a_k}, \tag{3}$$

причем матрицы $U_k\sim W_k$, $k=1,2,3$, но $U_1+U_2+U_3\sim -W_4+N$, где $N=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Представим матрицу $W=-W_4+N$ в виде суммы трех матриц $W=S_1+S_2+S_3$, где $S_k\sim W_k$, $k=1,2,3$.

Применим метод логарифмирования произведения двух матриц [4] к произведениям $V_1\cdot V_2\cdot V_3=V_1\cdot\left(V_2\cdot V_3\right)=V_1\cdot V_{23}$ и $V_1\cdot V_2\cdot V_3=\left(V_1\cdot V_2\right)\cdot V_3=V_{12}\cdot V_3$.

Получим два представления матрицы W: $W=S_1+S_{23}$, где $S_{23}\sim\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_{23}$ и $W=S_{12}+S_3$, где $S_{12}\sim\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_{12}$.

Запишем матрицы, входящие в первое уравнение, и решим его: $\begin{pmatrix}1-\alpha & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1 & c\\ d & s_1'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}s_{23} & -c\\ -d & s_{23}'\end{pmatrix}$, где $s_1+s_1'=\beta+1/2$, $s_{23}+s_{23}'=2-\alpha-\beta$, $s_1+s_{23}=1-\alpha$, $s_1'+s_{23}'=3/2$, $s_1\cdot s_1'-cd=1/2\beta$, $s_{23}\cdot s_{23}'-cd=1-\alpha-\beta$,

откуда находим $s_1=\beta$, $s_1'=1/2$, $s_{23}=1-\alpha-\beta$, $s_{23}'=1$, $c\cdot d=0$.

Учитывая, что матрицы V_1 и $V_2\cdot V_3$ нижнетреугольные, возьмем $c=0$ и получим первое представление матрицы W: $\begin{pmatrix}1-\alpha & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ d & 1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-\alpha-\beta & 0\\ -d & 1\end{pmatrix}$, где d – произвольная постоянная.

Аналогично из уравнения $W = S_{12} + S_3$ получаем второе представление матрицы W:
$\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\alpha & -c \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, где c – произвольная постоянная.

Поскольку $W = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + S_{23} = S_{12} + S_3$, то матрицу S_2 можно найти по формуле $S_2 = S_{23} - S_3 = \begin{pmatrix} 1-\alpha-\beta & 0 \\ -d & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-\alpha & -c \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & c \\ -d & 1/2 \end{pmatrix}$ или по формуле $S_2 = S_{12} - S_1 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ d & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & c \\ -d & 1/2 \end{pmatrix}$, которая дает тот же результат. Так как $S_2 \sim W_2$, то $\det S_2 = \rho_2 \cdot \sigma_2 = 0 \Rightarrow c \cdot d = \dfrac{\beta}{2} \Rightarrow d = \dfrac{\beta}{2c}$ и $S_2 = \begin{pmatrix} -\beta & c \\ -\dfrac{\beta}{2c} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Таким образом, матрица W с точностью до преобразования подобия с помощью диагональной матрицы $C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ единственным образом представляется в виде суммы матриц $W = S_1 + S_2 + S_3$, где $S_k \sim W_k$, $k = 1, 2, 3$.

Следовательно, матрицы S_k $(k = 1, 2, 3)$ и являются матрицами U_k системы (3), которая может быть записана в виде

$$\frac{dX}{d\xi} = X \left[\frac{\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \dfrac{\beta}{2c} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}{\xi - a_1} + \frac{\begin{pmatrix} -\beta & c \\ -\dfrac{\beta}{2c} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}{\xi - a_2} + \frac{\begin{pmatrix} 1-\alpha & -c \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}{\xi - a_3} \right]. \tag{4}$$

Пусть $X(\xi) = \begin{pmatrix} u(\xi) & u_1(\xi) \\ v(\xi) & v_1(\xi) \end{pmatrix}$. Тогда функции $u(\xi)$ и $u_1(\xi)$ связаны соотношениями

$$u' = \frac{\beta u + \dfrac{\beta}{2c} u_1}{\xi - a_1} + \frac{-\beta u - \dfrac{\beta}{2c} u_1}{\xi - a_2} + \frac{(1-\alpha) u}{\xi - a_3}, \tag{5}$$

$$u_1' = \frac{\dfrac{1}{2} u_1}{\xi - a_1} + \frac{cu + \dfrac{1}{2} u_1}{\xi - a_2} + \frac{-cu + \dfrac{1}{2} u_1}{\xi - a_3}. \tag{6}$$

Выразим из уравнения (5) $u_1 = \dfrac{2c}{\beta(a_1 - a_2)} (\xi - a_1)(\xi - a_2) \left[u' + \dfrac{-\beta}{\xi - a_1} + \dfrac{\beta}{\xi - a_2} + \dfrac{\alpha - 1}{\xi - a_3} u \right]$ и подставим в уравнение (6). Приходим к дифференциальному уравнению второго порядка вида

$$\begin{aligned} &u'' + p(\xi) u' + \left[\frac{1}{2} p(\xi) \left(\frac{1}{\xi - a_1} + \frac{1}{\xi - a_2} - \frac{1}{\xi - a_3} \right) + p'(\xi) + \right. \\ &\left. + \frac{\beta(a_1 - a_2)}{2(\xi - a_1)(\xi - a_2)} \left(\frac{1}{\xi - a_2} - \frac{1}{\xi - a_3} \right) \right] u = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $p(\xi) = \dfrac{1/2 - \beta}{\xi - a_1} + \dfrac{1/2 + \beta}{\xi - a_2} + \dfrac{\alpha - 3/2}{\xi - a_3}$.

Уравнение (7) после преобразований принимает вид

$$u''+\left(\frac{\frac{1}{2}-\beta}{\xi-a_1}+\frac{\frac{1}{2}+\beta}{\xi-a_2}+\frac{\alpha-\frac{3}{2}}{\xi-a_3}\right)u'+\left[\frac{\frac{1}{2}\beta}{(\xi-a_1)^2}+\frac{\frac{3}{2}(1-\alpha)}{(\xi-a_2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta+1\right)\xi+\frac{1}{2}(1-\alpha+\beta)a_1+\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)a_2+\frac{1}{2}\beta a_3}{(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)}\right]u=0. \tag{8}$$

Это дифференциальное уравнение класса Фукса с четырьмя особыми точками a_1, a_2, a_3, ∞, в котором дополнительная точка a «приклеилась» к точке a_3, т.е. $a=a_3$. Поэтому показатели $1-\alpha$, $1/2$ точки a_3 перешли в показатели $1-\alpha$, $3/2$ (при этом решение уравнения по-прежнему ограничено при $\xi\to a_3$, а разность показателей $0<3/2-(1-\alpha)<1$, т.к. $\alpha<1/2$). Это обусловлено тем, что в краевом условии (1) матрица A_3 является диагональной, а матрицы A_1 и A_2, соответственно, нижнее- и верхнетреугольными.

В окрестности каждой особой точки a_k, $k=\overline{1,4}$, уравнение (8) имеет 2 линейно-независимых решения, представимое рядами $u_k(\xi)=(\xi-a_k)^{\rho_k}\sum_{n=0}^{\infty}c_k(\xi-a_k)^n$, $v_k(\xi)=(\xi-a_k)^{\sigma_k}\sum_{n=0}^{\infty}d_k(\xi-a_k)^n$, коэффициенты которых находятся из рекуррентных соотношений после подстановки рядов в уравнение. С помощью ф.с.р. уравнения (8) строим матрицу $X(\xi)$, которая в окрестности каждой особой точки имеет вид $X(\xi)=D_k\begin{pmatrix}u_k & (\xi-a_1)(\xi-a_2)u_k' \\ v_k & (\xi-a_1)(\xi-a_2)v_k'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & q(\xi)(\xi-a_3)^{-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где D_k матрицы, приводящие матрицы V_k, $k=\overline{1,4}$, к нормальной жордановой форме, $q(\xi)=(\alpha-1)\xi^2+[(1-\alpha-\beta)a_1+(1-\alpha+\beta)a_2]\xi+\beta a_1a_3-\beta a_2a_3+(\alpha-1)a_1a_2$.

Зная каноническую матрицу $X(\xi)$ и частные индексы æ$_1$, æ$_2$, по известным формулам [6] строим решение и записываем условия разрешимости задачи (1).

Библиографический список

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664с.
2. Цицкишвили А.Р. О фильтрации в плотинах с наклонными откосами // Тр. Тбилисск. ун-та. Математика, механика, астрономия. 1977. Т.185. С.65–89.
3. Цицкишвили А.Р. О фильтрации в трапецеидальных земляных плотинах // Тр. Тбилисск. ун-та. Математика, механика, астрономия. 1980. Т.210. С.12–40.
4. Хвощинская Л.А. О применении логарифмирования произведения матриц к решению проблемы Римана // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. в 12т. 2015. Т.7. С.28-31.
5. Хвощинская Л.А. Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана // Междунар. семнадцатой науч. конф. им. акад. М. Кравчука: материалы. 2016. Т.1. С.263-266.
6. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448с.