

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН
В УЧРЕЖДЕНИЯХ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОФИЛЯ**

Сборник статей
по материалам Международной научно-практической конференции,
посвященной 100-летию кафедры высшей математики и физики

г. Горки, 19–20 декабря 2019 г.

Горки
БГСХА
2020

УДК 37.091.3:63(082)

ББК 74.26я43

A43

Редакционная коллегия:

кандидат ветеринарных наук, доцент В. В. Великанов (гл. ред.);
доктор экономических наук, доцент А. В. Колмыков (зам. гл. ред.);
доктор технических наук, профессор, чл.-корр. НАН Беларуси
В. А. Шаршунов;

кандидат технических наук, доцент Е. Н. Крючков;
доктор сельскохозяйственных наук, доцент В. И. Желязко;
кандидат технических наук, доцент С. В. Курзенков (отв. секретарь);
старший преподаватель А. В. Цвыр

Рецензент:

доктор сельскохозяйственных наук, профессор Ю. А. Мажайский;
доктор педагогических наук, профессор В. Н. Наумчик

A43 **Актуальные проблемы преподавания естественнонаучных и специальных дисциплин в учреждениях высшего и среднего специального образования сельскохозяйственного профиля** : сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию кафедры высшей математики и физики / редкол.: В. В. Великанов (гл. ред.) [и др.]. – Горки : БГСХА, 2020. – 169 с.
ISBN 978-985-7231-16-4.

Представлены доклады участников Международной научно-практической конференции, отражающие современное состояние естественнонаучных и специальных дисциплин в учреждениях высшего и среднего специального образования сельскохозяйственного профиля.

Для преподавателей высшего и среднего специального образования.

Статьи печатаются в авторской редакции с минимальной технической правкой.

УДК 37.091.3:63(082)

ББК 74.26я43

ISBN 978-985-7231-16-4

© УО «Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия», 2020

является точка касания шара с плоскостью. Однако наибольшая наглядность может быть достигнута в результате применения средств компьютерной графики. Анимированное движение точки по кривой второго порядка сопровождается движением по конусу образующей, соответствующей этой точке. Движение образующей определяет движение соответствующих точек по сферам и делает очевидным сохранение расстояния между ними, что является ключевой идеей доказательства. В случае гиперболы для наглядности следует осуществить отображение одного конуса в другой. Выделение равенства углов повышает наглядность доказательства в случае параболы. Контроль за углами делает видимым и процесс получения директориальных определений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов, С. Г. Аналитическая геометрия / С. Г. Кононов. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
2. Dandelin, G. Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution, et sur les hexagones de Pascal et de M. Brianchon // Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, T. III., 1826 (pp. 3–16).
3. Протасов, В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии / В. Ю. Протасов. – М.: МЦНМО. – 56 с. – (Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 31).
4. Погорелов, А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
5. Нилов, Ф. Сферы Данделена. Лекция на Малом мехмате МГУ / Ф. Нилов. – М., 2011.

УДК 631.363

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОЛЕБАНИЙ ШТАНГИ С НЕЗАВИСИМОЙ МАЯТНИКОВОЙ НАВЕСКОЙ И СИСТЕМОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

И. С. Крук¹, канд. техн. наук, доцент

А. А. Гиунчик¹, канд. физ.-мат. наук, доцент

В. Романюк², д-р техн. наук, профессор

¹Белорусский государственный аграрный технический университет,
г. Минск, Республика Беларусь

²Институт технологических и естественных наук в Валентах,
Отдел в Варшаве, Республика Польша

Ключевые слова: математический аппарат, расчет оборудования, математическое моделирование, колебание штанги, система стабилизации.

Аннотация. Рассматривается применение математического аппарата на примере расчета процесса колебания штанги с независимой маятниковой навеской и системой стабилизации в вертикальной плоскости.

В процессе изучения математики в вузе необходимо знакомить студентов с практической стороной применения получаемых ими математических знаний. Предпочтительно, чтобы студенты могли знакомиться именно с такими научными разработками, в которых применяется тот математический аппарат, который они изучают на младших курсах, в частности, дифференциальное и интегральное исчисление, решение дифференциальных уравнений, векторную алгебру и т. д.

В связи с постоянным совершенствованием полевых штанговых опрыскивателей, направленных на повышение производительности путем увеличения рабочей ширины захвата, актуальным остается вопрос эффективного гашения колебаний штанги. На основе проведенного анализа конструкций современных полевых штанговых опрыскивателей, достижений науки в области стабилизации и гашения колебаний штанговых рабочих органов [1–3] разработана расчетная схема штанги с независимой навеской и системой стабилизации, основанной на демпфирующих элементах (рис. 1). Подвижная рамка 5 закреплена на штоке гидроцилиндра 7, нижний конец которого крепится на пластине 4, опирающейся на две вертикальные пружины сжатия 1 и амортизатор 10, которые установлены на остова опрыскивателя 9. Рамка может свободно перемещаться в направляющих остова опрыскивателя. Штанга 6 закреплена на подвижной рамке 5 шарнирным соединением 4, обеспечивающим ее вращательное движение. При этом штанга совершает сложное движение по отношению к остова опрыскивателя: поступательное вместе с рамкой в направляющих (гашение колебаний осуществляется пружинами 1, и амортизатором 10) и вращательное относительно рамки (гашение колебаний – амортизаторами 2 и пружинами 3).

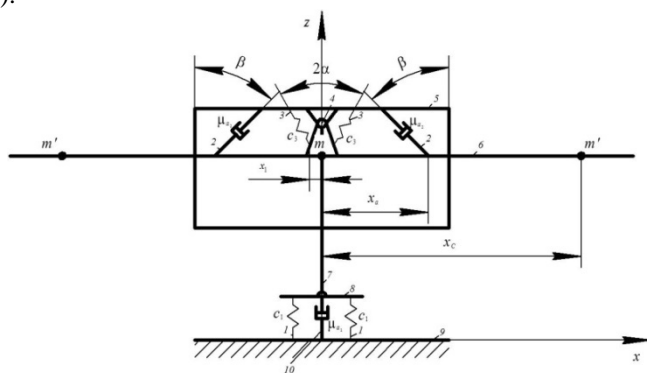


Рис. 1. Расчетная схема подвески штанги с системой стабилизации

Колебательное движение штанги опрыскивателя может быть описано уравнениями Лагранжа второго рода [4, 5]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = Q,$$

где t – время;

q – обобщенная координата;

\dot{q} – обобщенная скорость;

Q – обобщенная сила;

E_k – кинетическая энергия системы $E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_k^r$;

m – масса системы (навеска, штанга, элементы стабилизации);

v_c – скорость центра масс штанги;

a – коэффициент инерции.

Разложим движение системы (рис. 1) на переносное поступательное движение вместе с центром масс штанги и относительное по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с этим центром. Тогда уравнение Лагранжа для этого поступательного движения имеет такой вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(2)}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_k^{(2)}}{\partial q_2} = Q_{\text{п}} + Q_{\text{д}},$$

где $Q_{\text{п}}$ – потенциальная сила двух параллельных пружин 1 (см. рис. 1);

$Q_{\text{д}}$ – диссипативная сила сопротивления амортизатора 2.

Обобщенная потенциальная сила двух пружин равна $q = z$.

$$Q_{\text{п}} = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial q_2}, \quad E_{\text{п}} = \frac{2c_2 q_2^2}{2} = \frac{2c_2 z^2}{2} = c_2 z^2, \quad Q_{\text{п}} = -2c_2 z,$$

$$Q_{\text{д}} = -\mu_a \dot{q}_2 = -\mu_a \dot{z},$$

где $c_2 = 2c_1$, c_1 – жесткость пружины 1;

μ_a – обобщенный коэффициент сопротивления амортизатора.

Тогда

$$m\ddot{z} = -2c_2 z - \mu\dot{z}, \quad \text{или} \quad \ddot{z} + 2b\dot{z} + k^2 z = 0, \quad (1)$$

где $2b = \frac{\mu}{m}$; $k = \sqrt{\frac{2c_2}{m}}$

Решение дифференциального уравнения (1) в зависимости от соотношения между величинами b и k выражается одной из трех формул:

$$z = e^{-bt} A \sin(k_1 t + \alpha) \quad \text{при } b < k, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}; \quad (2)$$

$$z = e^{-bt} (C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}) \quad \text{при } b > k, \quad r = \sqrt{b^2 - k^2}; \quad (3)$$

$$z = e^{-bt} (C_1 t + C_2) \quad \text{при } b = k, \quad (4)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Для описания колебательного движения штанги в уравнении Лагранжа в качестве обобщенной координаты примем угол поворота штанги φ . Тогда уравнение примет такой вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_{\kappa}}{\partial \varphi} = - \frac{\partial E_{\Pi}'}{\partial \varphi} + Q_{\text{д}}', \quad E_{\Pi}' = cz^2,$$

где E_{Π}' – потенциальная энергия штанги;

$Q_{\text{д}}'$ – обобщенная сила сопротивления амортизаторов штанги;

$$z = \varphi x_1;$$

x_1 – расстояние от центральной точки подвеса штанги до точки крепления пружин на штанге.

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии полей сил тяжести E_{Π}^T и сил упругости E_{Π}^Y . $E_{\Pi}^T = Pz_c = 0$, так как $z_c = z_0 = 0$, $E_{\Pi}' = E_{\Pi}^Y$. $E_{\Pi}' = cz^2$, $c = c_3 \cos^2 \alpha$, $Q_{\Pi}' = -c_{\Pi} \dot{\varphi}$, ($c_{\Pi} = 2cx_1^2$). Обобщенная сила $Q_{\text{д}}'$, вызванная силой сопротивления амортизаторов, пропорциональной скорости $\bar{F}_c = -u\bar{v}_a$ (u – коэффициент пропорциональности):

$$Q_{\text{д}}' = - \frac{u\dot{\varphi} l_a^2}{\cos \beta} = -\mu' \dot{\varphi}, \quad \left(\mu' = \frac{ux_a^2}{\cos \beta} \right),$$

где $v_a = \dot{\varphi} x_a$ и $\delta z = \delta \varphi x_a$ – скорость и перемещение точки приложения силы \bar{F}_c соответственно;

x_a – расстояние от середины штанги до центра точки крепления на ней амортизатора.

Очевидно, что в рассматриваемой системе реализуется случай больших сопротивлений $b > k$ и применима зависимость (4). В общем

случае можно принять, что z стремится к нулю экспоненциально с некоторым коэффициентом n , т. е. $z \sim Ce^{-nt}$. Тогда

$$v_c = \dot{z} = -Cne^{-nt} = De^{-nt}, \quad (D = -Cn), \quad E_k = \frac{mD^2 e^{-2nt}}{2} + \frac{I_{cy} \dot{\phi}^2}{2},$$

где I_{cy} – момент инерции относительно оси y .

Принимая во внимание полученные выражения для кинетической энергии и обобщенных сил из уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения колебаний штанги в форме:

$$I_{cy} \ddot{\phi} + \mu' \dot{\phi} + c_{\Pi} \phi = Bx_c e^{-nt}, \quad (5)$$

где $Bx_c e^{-nt}$ – обобщенная сила переносной силы инерции, которую можно рассматривать как момент пары сил, образованной переносной силой инерции и силой тяжести половины штанги с плечом, равным расстоянию x_c от середины штанги до центра тяжести одной из половин штанги.

Обобщенная сила переносной силы инерции будет равна:

$$Q_{\text{пер}} = \frac{\sum \delta A_k}{\delta \phi} = \frac{Be^{-nt} \delta z}{\delta \phi} = \frac{Be^{-nt} x_c \delta \phi}{\delta \phi} = Bx_c e^{-nt}. \quad (B = mCn^2).$$

Разделив все члены уравнения (5) на I_{cy} , получим неоднородное дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$\ddot{\phi} + 2b' \dot{\phi} + (k')^2 \phi = B_0 e^{-nt}, \quad (6)$$

где $2b' = \frac{\mu'}{I_{cy}}$; $k' = \sqrt{\frac{c_{\Pi}}{I_{cy}}}$; $B_0 = \frac{Bx_c}{I_{cy}}$.

Неоднородному уравнению (6) соответствует однородное уравнение

$$\ddot{\phi} + 2b' \dot{\phi} + (k')^2 \phi = 0. \quad (7)$$

Решением неоднородного уравнения (6) является функция

$$\phi = \phi_1 + \phi_2,$$

где ϕ_1 – общее решение однородного уравнения (7);

ϕ_2 – частное решение неоднородного уравнения (6).

Общее решение φ_1 однородного дифференциального уравнения (7) записывается в одной из трех форм в зависимости от соотношений между величинами k' и b' :

если

$$k' < b', \text{ т } \varphi_1 = e^{-b't} (C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}), \quad r = \sqrt{(b')^2 - (k')^2}; \quad (8)$$

если

$$k' = b', \text{ то } \varphi_1 = e^{-b't} (C_1 t + C_2), \quad (9)$$

если

$$k' > b', \text{ то } \varphi_1 = e^{-b't} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t), \quad \omega = \sqrt{(k')^2 - (b')^2}; \quad (10)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями.

В результате введения вспомогательного аргумента $\alpha = \arcsin \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ функция (10) преобразуется к виду:

$$\varphi_1 = e^{-b't} A' \sin(\omega t + \alpha), \quad (A' = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} - \text{амплитуда колебаний}).$$

Частное решение φ_2 неоднородного уравнения (6) следует искать в зависимости от корней характеристического уравнения:

$$y^2 + 2b'y + (k')^2 = 0. \quad (11)$$

Если число n не является корнем характеристического уравнения (11), то частное решение φ_2 следует искать в виде функции $\varphi_2 = Q_0 e^{-nt}$, а если является, то либо в виде функции $\varphi_2 = Q_0 t e^{-nt}$, либо в виде функции $\varphi_2 = Q_0 t^2 e^{-nt}$, в зависимости от кратности корня n в характеристическом уравнении (11).

Если число n не является корнем характеристического уравнения (11), то, подставляя $\varphi_2 = Q_0 e^{-nt}$ в неоднородное уравнение (7), получаем:

$$Q_0 = \frac{B_0}{n^2 - 2b'n + (k')^2}. \quad (12)$$

Таким образом, если

$$k' < b', \text{ то } \varphi = e^{-b't} (C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}) + \frac{B_0}{n^2 - 2b'n + (k')^2} e^{-nt}, \quad (13)$$

если

$$k' = b', \text{ то } \varphi = e^{-b't} (C_1 t + C_2) + \frac{B_0}{n^2 - 2b'n + (k')^2} e^{-nt}, \quad (14)$$

если

$$k' > b', \text{ то } \varphi = e^{-b't} A' \sin(\omega t + \alpha) + \frac{B_0}{n^2 - 2b'n + (k')^2} e^{-nt}. \quad (15)$$

При $b' \neq k'$ характеристическое уравнение (11) имеет два различных корня, следовательно, только один из них может совпасть со значением n . В этом случае подставляем выражение $\varphi_2 = Q_0 t e^{-nt}$ в неоднородное уравнение (7) и получаем:

$$Q_0 = \frac{B_0}{n^2 t - 2b'nt + (k')^2 t + 2b' - 2n}. \quad (16)$$

Таким образом,

если $k' < b'$, то

$$\varphi = e^{-b't} (C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}) + \frac{B_0}{n^2 t - 2b'nt + (k')^2 t + 2b' - 2n} t e^{-nt}, \quad (17)$$

если $k' > b'$, то

$$\varphi = e^{-b't} A' \sin(\omega t + \alpha) + \frac{B_0}{n^2 t - 2b'nt + (k')^2 t + 2b' - 2n} t e^{-nt}. \quad (18)$$

При $b' = k'$ характеристическое уравнение (11) имеет один корень кратности два, следовательно, в случае совпадения его со значением n в неоднородное уравнение (7) подставляем выражение $\varphi_2 = Q_0 t^2 e^{-nt}$ и получаем:

$$Q_0 = \frac{B_0}{n^2 t^2 - 2b'nt^2 + (k')^2 t^2 + 4b't - 4nt + 2}. \quad (19)$$

Таким образом, при $b' = k'$ имеем:

$$\varphi = e^{-b't} (C_1 t + C_2) + \frac{B_0}{n^2 t^2 - 2b'nt^2 + (k')^2 t^2 + 4b't - 4nt + 2} t^2 e^{-nt}. \quad (20)$$

Заключение. Для предложенной расчетной схемы штанги с системой стабилизации разработана последовательность проведения аналитических исследований процесса колебаний штанги в зависимости от начальных условий, параметров и характеристик используемых демпфирующих элементов, при которых обеспечивается эффективное их гашение. Показано, что при определенных числовых значениях геометрических параметров штанги, способа навешивания и гашения ее колебаний происходит изменение не только числовых значений функций, но и самих функций, описывающих процесс движения штанги в вертикальной плоскости, включая случаи резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крук, И. С. Использование независимой навески и системы стабилизации штанги в конструкциях сельскохозяйственных опрыскивателей / И. С. Крук, А. И. Гайдуковский // Экология и сельскохозяйственная техника: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – СПб.: СЗНИИМЭСХ, 2009. – Т. 2 – С. 191–197.
2. Методика оценки технического состояния полевых штанговых опрыскивателей и технологические требования к ним / С. К. Карпович, Л. А. Маринич, И. С. Крук [и др.]; под общ. ред. И. С. Крука. – Минск: БГАТУ, 2016. – 140 с.
3. Вікович, І. А. Конструкції і динаміка штангових обприскувачів: монографія / І. А. Вікович. – Львів: Видавн. Нац. універс. «Львівська політехніка», 2003. – 460 с.
4. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер; пер. с англ. Л. С. Корнейчука; под ред. Э. И. Григолюка. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
5. Яблонский, А. А. Курс теории колебаний / А. А. Яблонский, С. Н. Сигизмуд. – М.: Высш. шк., 1966. – 256 с.