*Белорусский государственный агротехнический университет, Минск*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПНЕВМОКОЛЕСНЫХ ДВИЖИТЕЛЕЙ С ПОЧВОЙ В ВИДЕ ОДНО- И ДВУХМАССОВОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

**Чигарев Ю.В., Романюк Н.Н., Рутковский И.Г.**

## ВВЕДЕНИЕ

Передвижение машинно-тракторных агрегатов (МТА) по полям породило проблему переуплотнения почв. Эта проблема непосредственно связана с массой МТА, скоростью их передвижения, рельефом опорной поверхности.

Повышение скорости движения, переезд тракторов поперек периодически повторяющихся борозд поля, которые имеют волнообразный профиль, приводит к увеличению амплитуд колебаний, ускорений различных точек МТА и динамических нагрузок, действующих на них со стороны опорной поверхности, которые передаются через движители на почву.

Мгновенное значение вертикальной нагрузки $G_{дин}(t)$, приходящейся на ось колеса, можно определить по зависимости:

$$G_{дин}(t) = M(g \pm \ddot{\xi}), \qquad (1)$$

где $M$ – масса, нагруженная ось колеса, кг;

$g$, $\ddot{\xi}$ – ускорение свободного падения и оси колеса соответственно.

Анализ формулы (1) показывает, что снизить динамические нагрузки можно за счет уменьшения:

– массы МТА (что весьма проблематично),

– ускорения колебаний оси колеса $\ddot{\xi}$.

Аналитическое исследование колебательных систем заключается в составлении и решении дифференциальных уравнений. Такой способ удобен тем, что он позволяет получить количественное решение практически с любой точностью и качественную оценку после несложного анализа, но при этом необходимо выполнить значительный объем вычислений.

### Методы решения

Рассмотрим взаимодействие одиночного пневмоколесного движителя, передвигающегося по опорной поверхности, в виде двухмассовой эквивалентной колебательной системы в случае наличия подвески (рисунок 1, а) и одномассовой – без подвески (рисунок 1, б). Влиянием тракториста на колебания пренебрегаем, так как оно мало.

Примем, что силы сопротивления в подвеске пропорциональны скорости колебаний остова трактора.

Пусть уравнение продольного профиля пути имеет вид:

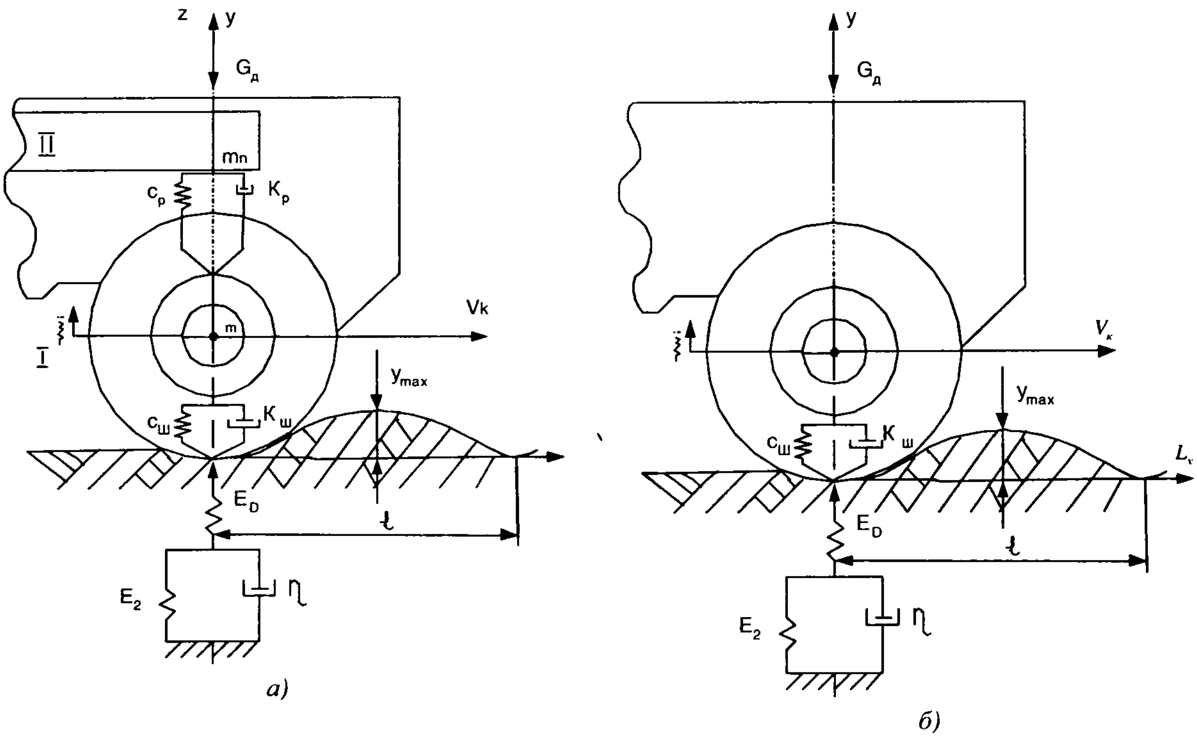



*Рисунок 1. Схема взаимодействия одиночного пневмоколесного движителя с опорной поверхностью в виде эквивалентной колебательной системы: а) – двухмассовой, б) – одномассовой*

$$y = y_{\max} \sin \lambda t, \qquad (2)$$

где $y_{\max}$ – максимальная высота неровности поверхности;

$\lambda = \dfrac{2\pi V_K}{l}$ – частота вынужденных колебаний, создаваемая неровностями поверхности;

$V_K$ – скорость движения колеса;

$l$ – длина волны неровности поверхности.

Уравнения колебаний одиночного пневмоколесного движителя в случае наличия подвески в вертикальной плоскости, выраженные через вертикальное перемещение $z$ подрессоренной массы и вертикальное перемещение оси колеса $\xi$ (рисунок 1, а) при движении по опорной поверхности, задаваемой уравнением 2, аналогично [1, с. 210], будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{z} + 2h_n\dot{z} + \omega_n^2 z - 2h_n\dot{\xi} - \omega_n^2\xi = 0, \\ \ddot{\xi} + 2h_н\dot{\xi} + \omega_н^2\xi - 2h_{но}\dot{z} - \omega_{но}^2 z = Q_y / m = 2h_ш\dot{y} + \omega_ш^2 y, \end{cases} \qquad (3)$$

где $z, \dot{z}, \ddot{z}$ – соответственно амплитуда, скорость и ускорение подрессоренной массы;

$\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ – соответственно амплитуда, скорость и ускорение колебаний оси колеса;

$h_П = \dfrac{K_P}{2m_n}$ – коэффициент затухания вертикальных колебаний подрессоренной массы;

$K_p$ – коэффициент демпфирования (сопротивления) подвески;

$\omega_П = \sqrt{\dfrac{C_p}{m_n}}$ – частота вертикальных колебаний подрессоренной массы;

$C_p$ – коэффициент жесткости подвески;

$h_Н = \dfrac{K_P + K_Ш}{2m}$ – коэффициент затухания вертикальных колебаний неподрессоренной массы;

$K_Ш$ – коэффициент демпфирования (сопротивления) шины;

$\omega_Н = \sqrt{\dfrac{C_p + C_Ш}{m}}$ – частота вертикальных колебаний неподрессоренной массы;

$C_Ш$ – коэффициент жесткости шины;

$m_n$ – подрессоренная масса остова;

$m$ – неподрессоренная масса;

$M = m_n + m$ – масса, нагружающая ось колеса;

$h_{Но} = \dfrac{K_P}{2m}$ – коэффициент затухания, с$^{-1}$;

$\omega_{Но} = \sqrt{\dfrac{C_p}{m}}$ – частота колебаний, с$^{-1}$;

$Q_y$ – сила, являющаяся следствием кинематического возбуждения со стороны поля, формирующегося за счет движения движителя по неровностям;

$h_Ш = \dfrac{K_Ш}{2m}$ – коэффициент затухания вертикальных колебаний шины;

$\omega_Ш = \sqrt{\dfrac{C_Ш}{m}}$ – частота вертикальных колебаний шины.

Для решения приведенной системы уравнений (3) воспользуемся системой *MATLAB*. Пакет *Simulink* входит в состав системы *MATLAB* и предназначен для математического моделирования динамических систем, представленных своей функциональной блок-схемой, именуемой моделью. Для построения функциональной блок-схемы моделируемых устройств *Simulink* имеет библиотеку блочных компонентов и редактор блок-схем [2].

В *Simulink* собирается блок-схема, приведенная на рисунке 2. Для моделирования первое уравнение системы 3 приведем к виду:

$$\ddot{z} = -2h_n\dot{z} - \omega_n^2 z + 2h_n\dot{\xi} + \omega_n^2\xi . \qquad (4)$$

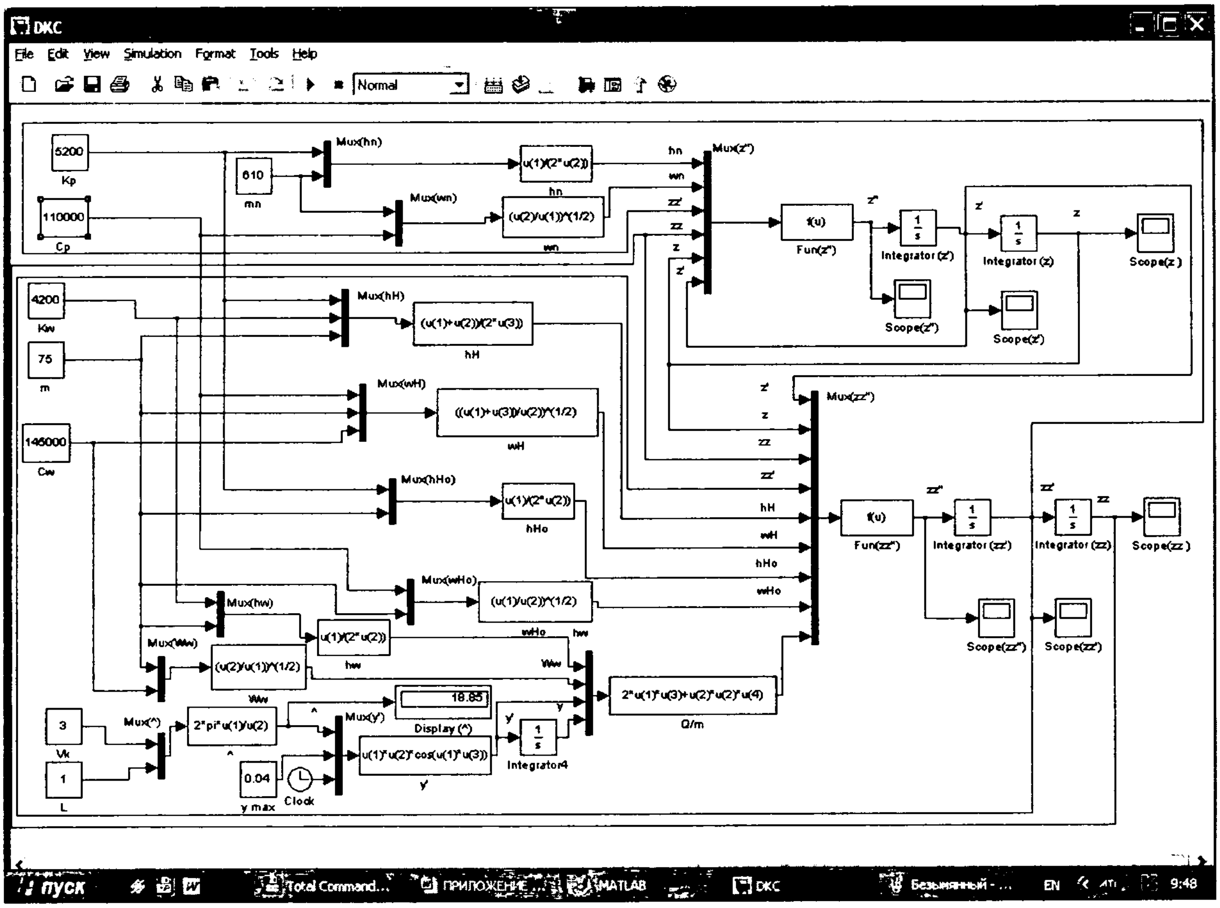



*Рисунок 2. Блок-схема для двухмассовой эквивалентной колебательной системы*

В блок Fun$(z'')$ /соответствует физической величине ускорения подрессоренной массы $\ddot{z}$/ записывается уравнение:

$$-2*u(1)*u(6)-u(2)*u(2)*u(5)+2*u(1)*u(3)+u(2)*u(2)*u(4), \qquad (5)$$

где $u(1)$ – hn /$h_П$/, $u(2)$ – wn /$\omega_П$/, $u(3)$ – $zz'$/$\dot{\xi}$/, $u(4)$ – $zz$/$\xi$/, $u(5)$ – $z$/$z$/,

$u(6)$ – $z'$/$\dot{z}$/ – компоненты вектора входного сигнала и их соответствие физическим величинам.

Начальное значение амплитуды колебаний подрессоренной массы $z$:

$$z=0. \qquad (6)$$

Это значение записывается в блок *Integrator z*, в поле *Initial condition.*

Начальное значение скорости колебаний подрессоренной массы $\dot{z}$ в вертикальной плоскости записывается в блок *Integrator(* $z'$ *)*:

$$\dot{z}=0. \qquad (7)$$

В блок hn/$h_П$/ записывается уравнение:

$$u(1)/(2*u(2)), \qquad (8)$$

где $u(1)$ – $Kp$/$K_P$/, $u(2)$ – mn/$m_п$/ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок wn /$\omega_П$/ записывается уравнение:

$$(u(2)/u(1))\hat{}(1/2), \qquad (9)$$

где $u(1)$ – mn/$m_п$/, $u(2)$ – Cp/$C_P$/ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

Второе уравнение системы (2.43) приведем к виду:

$$\ddot{\xi} = -2h_н\dot{\xi} - \omega_н^2\xi + 2h_{но}\dot{z} + \omega_{но}^2 z + Q_y / m\,. \qquad (10)$$

В блок Fun ( $zz''$ ) / $\ddot{\xi}$ / оно запишется в виде:

$$-2*u(5)*u(4) - u(6)*u(6)*u(3) + 2u(7)*u(1) + u(8)*u(8)*u(2) + u(9)\,, \qquad (11)$$

где $u(1) - z' / \dot{z} /$, $u(2) - z$, $u(3) - zz / \xi /$, $u(4) - zz' / \dot{\xi} /$, $u(5) - \mathrm{hH} / h_H /$, $u(6) - \mathrm{wH} / \omega_H /$, $u(7) - \mathrm{hH0} / h_{H_0} /$, $u(8) - \mathrm{wH0} / \omega_{H_0} /$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

На девятый вход $u(9)$ объединителя *Mux* ($zz''$) / $\ddot{\xi}$ / подается Q/*m*- / $\frac{Q_y}{m}$ /.

Начальное значение амплитуды колебаний оси колеса $\xi$ записывается в блок *Integrator*( $zz$ ):

$$\xi = 0\,. \qquad (12)$$

Начальное значение скорости колебаний оси колеса $\dot{\xi}$ в вертикальной плоскости записывается в блок *Integrator*( $\mathrm{zz}'$ ):

$$\dot{\xi} = 0\,. \qquad (13)$$

В блок $\mathrm{hH} / h_H$ /записывается уравнение:

$$(u(1) + u(2)) / (2*u(3))\,, \qquad (14)$$

где $u(1) - \mathrm{Kp}$ $/ K_P /$, $u(2) - \mathrm{Kw} / K_ш /$, $u(3) - m$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок $\mathrm{wH} / \omega_H$ /записывается уравнение:

$$((u(1) + u(3)) / u(2))\text{^}(1/2)\,, \qquad (15)$$

где $u(1) -$ Cp $/ C_P /$, $u(2) - m$, $u(3) - \mathrm{Cw} / C_ш /$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок $\mathrm{hH0} / h_{H_0}$ / записывается уравнение:

$$u(1) / (2*u(2))\,, \qquad (16)$$

где $u(1) -$ $\mathrm{Kp} / K_P /$, $u(2) - m$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок $\mathrm{wH0} / \omega_{H_0}$ / записывается уравнение:

$$(u(1) / u(2))\text{^}(1/2)\,, \qquad (17)$$

где $u(1) -$ Cp $/ C_P /$, $u(2) - m$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок Q/*m* параметр $Q_y / m$ записывается в виде:

$$2*u(1)*u(3) + u(2)*u(2)*u(4)\,, \qquad (18)$$

где $u(1) - \mathrm{hw}$ $/ h_ш /$, $u(2) - \mathrm{Ww} / \omega_ш /$, $u(3) - y' / \dot{y} /$, $u(4) - y -$ компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок hw / $h_ш$ / записывается уравнение:

$$u(1)/(2*u(2)), \qquad (19)$$

где $u(1)-$ Kw / $K_ш$ /, $u(2)=m$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок Ww / $\omega_ш$ / записывается уравнение:

$$(u(2)/(u(1))^\wedge(1/2), \qquad (20)$$

где $u(1)-m$, $u(2)-$Cw / $C_ш$ / – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок $y'/\dot{y}/$ записывается уравнение:

$$u(1)*u(2)*\cos(u(1)*u(3)), \qquad (21)$$

где $u(1)-{}^\wedge(\lambda)$, $u(2)=y_{\max}$, $u(3)-$время $t-$ компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок $^\wedge(\lambda)$ записывается уравнение:

$$2*pi*u(1)/u(2), \qquad (22)$$

где $u(1)-$Vk /$V_K$ /, $u(2)-$L($l$)– компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

Чтобы на вход 3 объединителя сигнала *Mux* $y'/\dot{y}/$ подать время $t$ используется блок *Clok.*

При отсутствии подвески, уравнение колебаний одиночного пневмоколесного движителя в вертикальной плоскости, заданного в виде эквивалентной одномассовой колебательной системы (рисунок 1, б) будет иметь вид:

$$\ddot{\xi}+2h_Ш\dot{\xi}+\omega_Ш^2\xi=2h_Ш\dot{y}+\omega_Ш^2 y. \qquad (23)$$

Приведем уравнение (23) к виду:

$$\ddot{\xi}=-2h_Ш\dot{\xi}-\omega_Ш^2\xi+Q_y/M. \qquad (24)$$

На рисунке 3 приведена блок-схема, собранная в *Simulink* для уравнения (24) колебаний одиночного пневмоколесного движителя в вертикальной плоскости, заданного в виде эквивалентной одномассовой колебательной системы.

В блок Fun ( $zz''$ ) / $\ddot{\xi}$ / оно запишется в виде:

$$-2*u(3)*u(2)-u(4)*u(4)*u(1)+u(5), \qquad (25)$$

где $u(1)-zz(\xi)$, $u(2)-zz'(\dot{\xi})$, $u(3)-$hw / $h_ш$ /, $u(4)-$Ww / $\omega_ш$ /– компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

На пятый вход $u(5)$ объединителя *Mux* $(zz'')/\ddot{\xi}/$ подается Q/M- /$\frac{Q_y}{M}$/.

Начальное значение амплитуды колебаний оси колеса $\xi$ записывается в блок *Integrator*( $zz$ ):

$$\xi=0. \qquad (26)$$

Начальное значение скорости колебаний оси колеса $\dot{\xi}$ в вертикальной плоскости записывается в блок *Integrator* ( $zz'$ ):

$$\dot{\xi}=0. \qquad (27)$$

В блок hw / $h_ш$ / записывается уравнение:

$$u(1)/(2*u(2)), \tag{28}$$

где $u(1)-$ Kw / $K_ш$ /, $u(2)=M$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок Ww / $\omega_ш$ / записывается уравнение:

$$(u(2)/(u(1))\text{^}(1/2), \tag{29}$$

где $u(1)=M$, $u(2)-$Cw / $C_ш$ / – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок Q/M параметр $Q_y / M$ записывается в виде:

$$2*u(1)*u(3)+u(2)*u(2)*u(4), \tag{30}$$

где $u(1)-$hw / $h_ш$ /, $u(2)-$Ww / $\omega_ш$ /, $u(3)-y'$ / $\dot{y}$ /, $u(4)-y$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

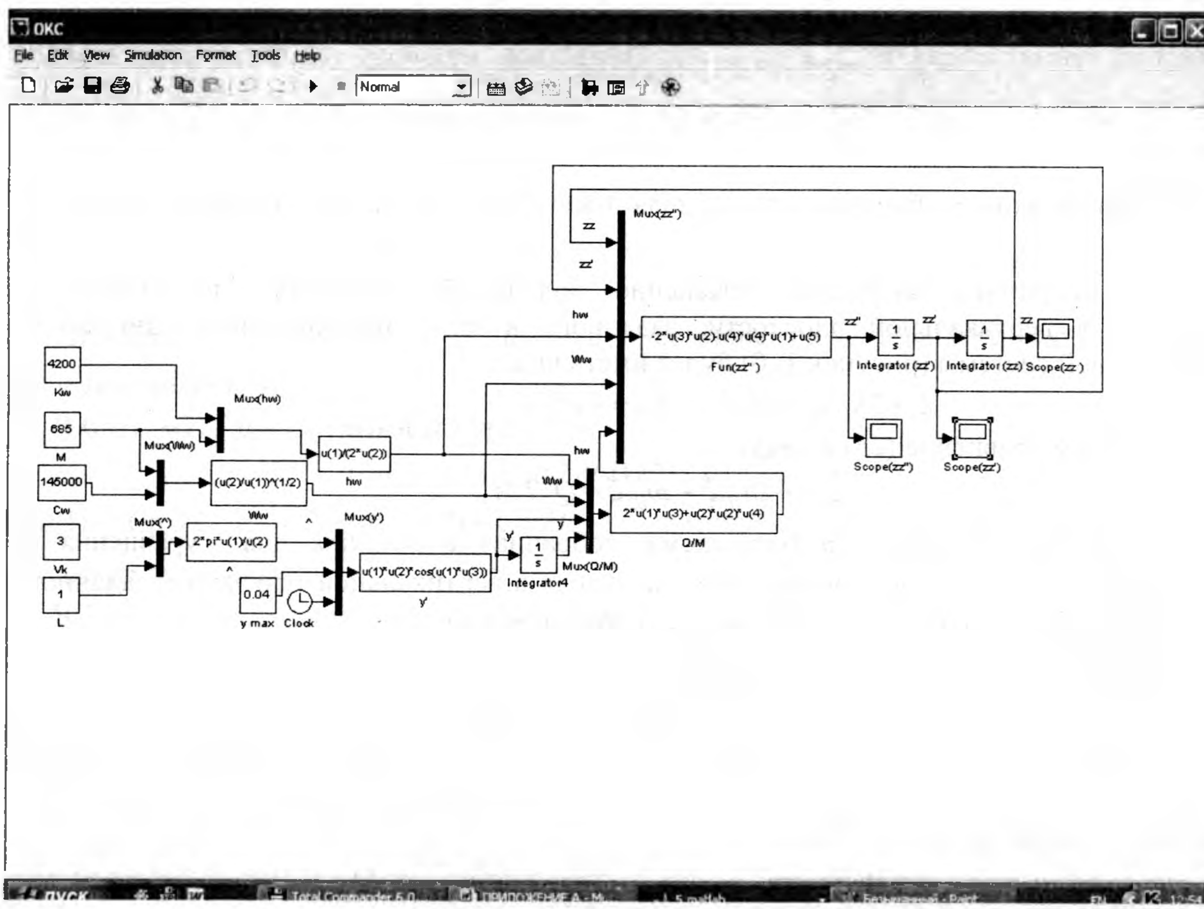



*Рисунок 3. Блок-схема для одномассовой эквивалентной колебательной системы*

В блок y′ / $\dot{y}$ / записывается уравнение:

$$u(1)*u(2)*\cos(u(1)*u(3)), \tag{31}$$

где $u(1)$–^($\lambda$), $u(2)=y_{\max}$, $u(3)-$время $t-$ компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок $\wedge(\lambda)$ записывается уравнение:

$$2*pi*u(1)/u(2), \qquad (32)$$

где $u(1)$ – Vk $/V_K/$, $u(2)$ – L($l$) – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

Блок *Clok* используется для подачи времени t на вход 3 объединителя сигнала *Mux* $y'$ $/\dot{y}/$.

Для ввода исходных данных следует использовать блоки *Constant,* для просмотра результатов расчета – *Display* и *Scope*. Причем в блоке *Display* отображают результат расчета в численном виде, а в блоке – *Scope* в графическом виде.

Для настройки режима моделирования в верхнем меню *Simulation* используется пункт *Simulation Parameters...* При решении дифференциальных уравнений в разделе *Solver options* выбираем *ode 15s (stiff/NDF)*. Этот метод больше подходит для решения дифференциальных уравнений в частных производных, чем установленный по умолчанию *ode 45,* который реализует алгоритм метода Рунге–Кутта. Время моделирования устанавливается в окне *Stop time*.

Для запуска процесса моделирования используется *Start simulation*. Просмотр результатов моделирования осуществляется по двум щелчкам мышью по соответствующему блоку *Scope*. Автоматическое масштабирование графика в окне *Scope* производится при помощи кнопки *Auto scale*.

При моделировании использовались два типа шин: диагональные и радиальные, для двухмассовой эквивалентной колебательной системы задавались различные параметры подвески. Характеристики шин задавались согласно исследований, проведенных В.П. Бойковым [3, рисунок 17, с.45; рисунок 44, б, с.84] и учетом опорной жесткости почвы $C_{on}$ при $\kappa_0 = 1{,}3\cdot10^{-7}\,\frac{м^3}{Н}$.

Результаты моделирования двухмассовой эквивалентной колебательной системы показаны на рисунке 4, одномассовой – на рисунке 5.

## ВЫВОДЫ

1 Двухмассовая эквивалентная колебательная система имеет преимущества по сравнению с одномассовой, так как при наличии подвески, значение ускорений колебаний оси колеса $\ddot{\xi}$ меньше.

2 К повышению ускорений колебаний оси колеса $\ddot{\xi}$ ведут увеличение: высоты неровности поверхности $y_{max}$, скорости движения $V_K$, внутришинного давления $p_w$; уменьшение длины волны неровности поверхности $l$.

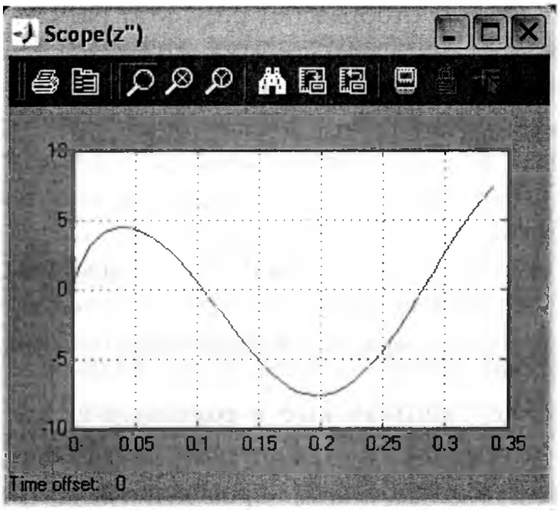
3 Значение ускорений колебаний оси колеса $\ddot{\xi}$ у радиальных шин меньше, чем у диагональных.

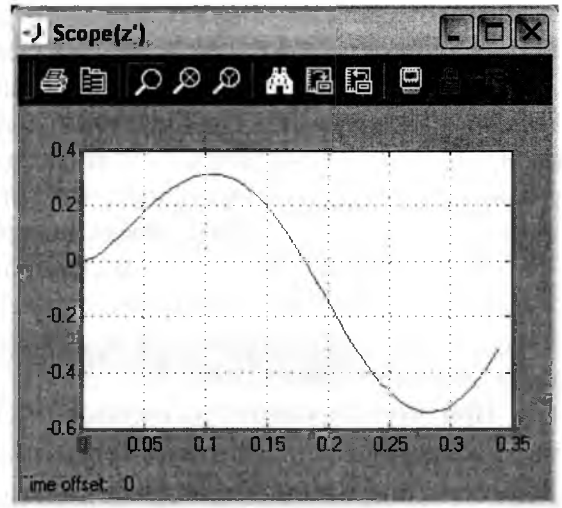
Снизить ускорение колебаний оси колеса можно за счет:

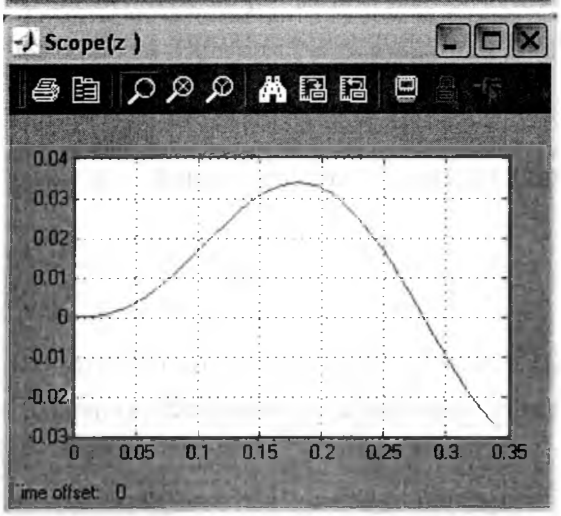
- выравнивания поверхности поля (уменьшения максимальной высоты $y_{max}$ и увеличения дины волны $l$ неровности поверхности);
- снижения внутришинного давления до $80кПа$;
- скорость движения при выполнении сельскохозяйственных операций не должна превышать $3м/с$;

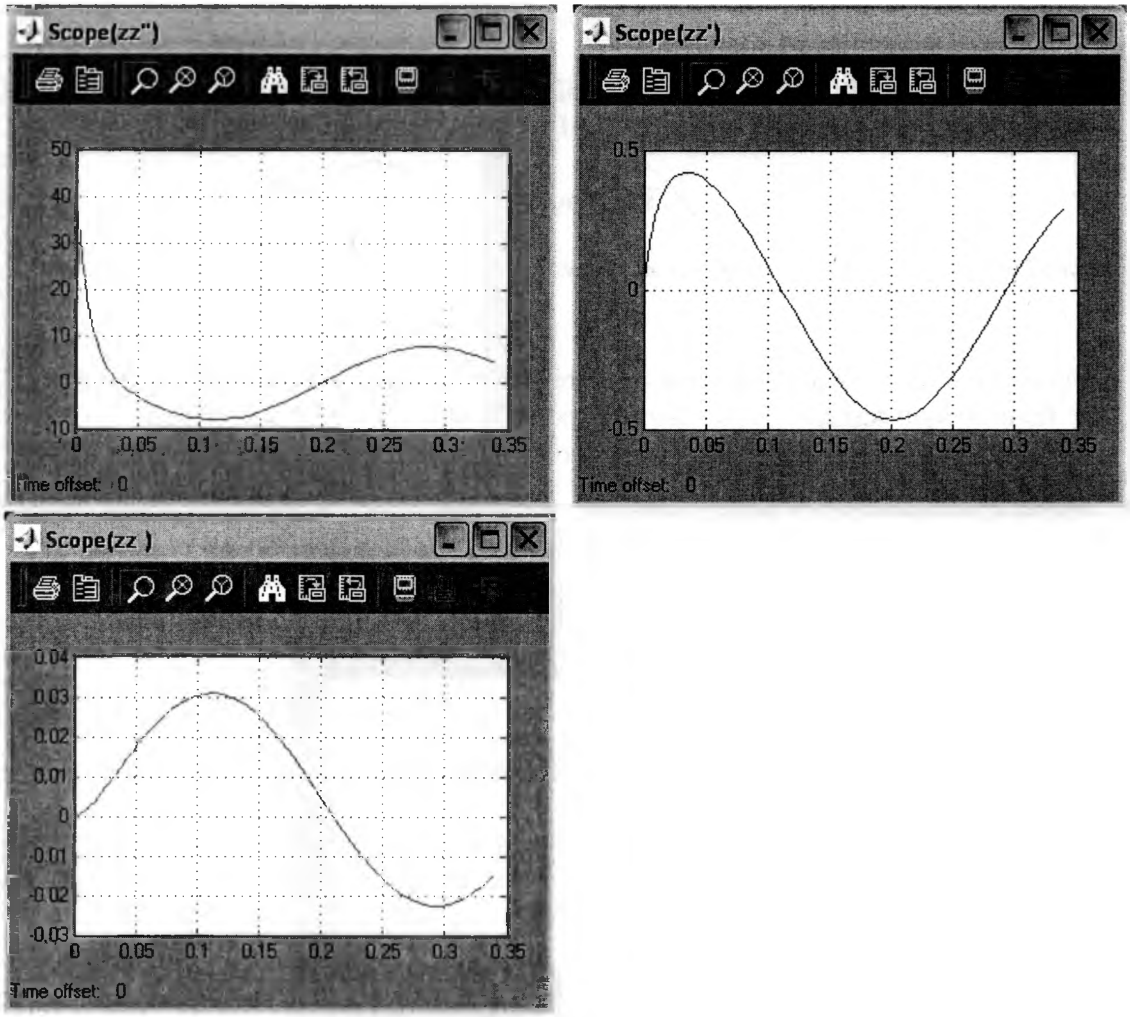
•	для одномассовой эквивалентной колебательной системы – использовать специальные шины с повышенной демпфирующей способностью и увеличенным статическим прогибом;

•	для двухмассовой эквивалентной колебательной системы – параметры системы подрессоривания должны иметь значения: $C_P = 110...220\frac{кН}{м}$ и $K_P = 5{,}2...7\frac{кН \cdot с}{м}$.





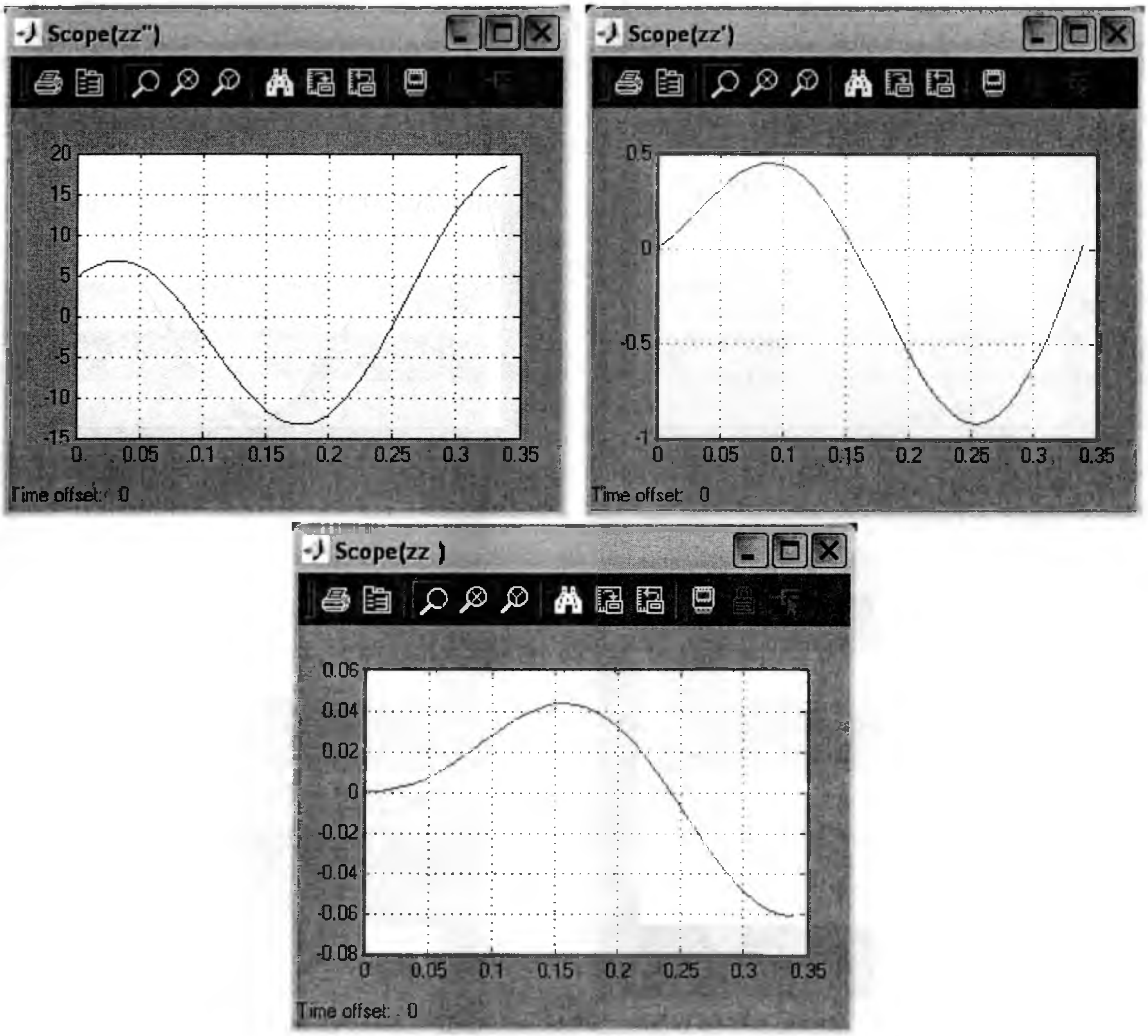

$$C_Ш = 145\frac{кН}{м}, K_Ш = 4{,}2\frac{кН \cdot с}{м}, C_P = 110\frac{кН}{м}, K_P = 5{,}2\frac{кН \cdot с}{м}, V_K =$$

$$= 3\frac{м}{с}, l = 1м, y_{\max} = 0{,}04м, m_n = 610кг, m = 75кг;$$

$z''(\ddot{z}), z'(\dot{z}), z$ - соответственно ускорение, скорость, амплитуда колебаний подрессоренной массы;

$zz''(\ddot{\xi}), zz'(\dot{\xi}), zz(\xi)$ - соответственно ускорение, скорость, амплитуда колебаний оси колеса

*Рисунок 4. Результаты моделирования блок-схемы двухмассовой эквивалентной колебательной системы*




$$C_Ш = 145\frac{кН}{м}, K_Ш = 4{,}2\frac{кН \cdot с}{м}, V_К = 3\frac{м}{с}, l = 1м, y_{\max} = 0{,}04м, M = 685кг;$$

$zz''(\ddot{\xi}), zz'(\dot{\xi}), zz(\xi)$ - соответственно ускорение, скорость, амплитуда колебаний оси колеса

*Рисунок 5. Результаты моделирования блок-схемы одномассовой эквивалентной колебательной системы*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов, Г.А. Теория движения колесных машин / Г.А. Смирнов. – 2-е изд., доп. и перераб. – Москва: Машиностроение, 1990. – 352с.

2. Черных, И.В. Simulink. Среда создания инженерных приложений / И.В. Черных; под общей редакцией В.Г. Потемкина. – Москва: Диалог – МИФИ, 2004. – 491с.

3. Бойков, В.П. Шины для тракторов и сельскохозяйственных машин / В.П. Бойков, В.Н. Белковский. – Москва: Агропромиздат, 1988. – 240с.