для систем на рис. 7.1 а, в реакции связей не войдут в суммы моментов относительно точек А и О; для системы на рис. 7.1 б – в сумму проекций на ось х. Чтобы получить представление о величине реакций связей рассмотрим систему 7.1 а. Стержень ВС повернем на угол α в положение ВС'. Система станет статически определимой. Составим для нее сумму моментов относительно точки А: $R_B' \sin\alpha\, b - Fa = 0$. Отсюда получаем: $R_B' = a F/(b \sin\alpha)$. Из формулы видно, что при обратном переходе к мгновенно-изменяемой системе $\alpha \to 0$, $R_B' \to R_B \to \infty$. В процессе синтеза необходимо следить, чтобы все структурные элементы вводились с помощью корректных систем связей.

УДК

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД.

А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев

В настоящей работе, применяя операцию разрывов [1] исследуем поведение нестационарных возмущений вдоль характеристик в неоднородной упруговязкопластической среде. Получены уравнения для изменения интенсивности возмущенного состояния, которые приводятся к виду удобному для исследования динамической устойчивости сложных сред [2].

Рассмотрим упруговязкопластическое тело объема V, ограниченное поверхностью S, с заданными на ней краевыми условиями. Считаем тело изотропным, неоднородным. Тензор упругих деформаций e_{ij}^e связан с напряжениями σ_{ij} законом Гука.

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} e \tag{1}$$

Здесь λ и μ — параметры Ламе.

Среда находится в упругом состоянии, если

$$S_{ij}S_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) < k^2 \tag{2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, k — коэффициент пластичности.

Если $S_{ij}S_{ij} > k^2$, то тело деформируется пластическим образом. В этом случае, компоненты тензора скорости пластических деформаций $\dot{e}_{ij}^p$ связаны с тензором напряжений условием

$$\left(S_{ij}-\eta\dot{e}_{ij}^{P}\right)\left(S_{ij}-\eta\dot{e}_{ij}^{P}\right)=2k^{2}, \qquad (3)$$

где η — коэффициент вязкости.

Ассоциированный закон течения имеет вид

$$\dot{e}_{ij}^{P}=\psi\left(S_{ij}-\eta\dot{e}_{ij}^{P}\right), \qquad \psi>0 \qquad (4)$$

Полные деформации связаны с упругими e_{ij}^{e} и пластическими e_{ij}^{P} обычным образом

$$e_{ij}=e_{ij}^{e}+e_{ij}^{P} \qquad (5)$$

и выражаются через перемещения u_i с помощью формул Коши

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{i,j}\right) \qquad (6)$$

Представленная модель является обобщением модели тела Бингама. Для замыкания системы определяющих уравнений запишем уравнения движения и граничные условия в виде

$$\left[\sigma_{kj}\left(\delta_{ik}+u_{i,k}\right)\right]_{,j}-\rho\frac{\partial^{2}u_{i}}{\partial t^{2}}=0, \qquad (7)$$

где ρ — плотность.

$$\left[\sigma_{kj}\left(\delta_{ik}+u_{i,k}\right)\right],n_{j}=p_{i} \qquad (8)$$

где n_j — нормаль к гранитной поверхности, p_i — приложенные силы.

В соотношениях (1) — (4) коэффициенты упругости — λ, μ пластичности — k, вязкости — η, являются функциями пространственных координат.

Обозначим решение системы (1) — (8) через $\sigma_{ij}^{0}\left(x_n,\ t\right)$, $e_{ij}^{0}\left(x_n,\ t\right)$, $u_{ij}^{0}\left(x_n,\ t\right)$. Будем считать, что с течением времени они асимптотически стремятся к $\sigma_{ij}^{0}\left(x_n\right)$, $e_{ij}^{0}\left(x_n\right)$, $u_{ij}^{0}\left(x_n\right)$.

Представим величины связанные с возмущенной формой движения в виде:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{0}+\sigma_{ij}^{+};\ e_{ij}=e_{ij}^{0}+e_{ij}^{+};\ u_{ij}=u_{ij}^{0}+u_{ij}^{+} \qquad (9)$$

Будем считать возмущение σ_{ij}^{+}, e_{ij}^{+}, u_{ij}^{+} малыми, а величины $e_{ij,\,k}^{P+}=0$. Тогда при подстановке (9) в исходные уравнения получим из (7) и (1) соотношения возмущенного движения

$$E_{nm,\ m}^{+}=\rho\frac{\partial^{2}u_{n}}{\partial t^{2}}; \qquad (10)$$

$$E^{+}_{nm} - \sigma^{0}_{mn} e^{+}_{i,j} = \lambda e^{e}_{ij}\delta_{nm} + \mu\left(e^{+}_{m,n} + e^{+}_{n,m}\right) \qquad (11)$$

где

$$E^{+}_{nm} - \sigma^{+}_{nm} = \sigma^{+}_{nk}\left(1 - 3\lambda(3\lambda + 2\mu)^{-1}\right)\sigma^{0}_{mk} / 2\mu \qquad (12)$$

Рассмотрим распространение нестационарных возмущений в рассматриваемой среде в виде поверхностей разрыва L_t, на которых величины возмущений напряжений и деформаций испытывают разрыв, а величины напряжений и деформаций основного состояния и параметры среды непрерывны. Знаком [ ] обозначим разность значений некоторой функции f на разных сторонах от поверхности разрыва т.е. $[f] = f^{+} - f^{-}$, где f^{-} — значение f на задней, f^{+} — на передней стороне поверхности. Используя [1] можно получить, что скачок возмущений распространяется в виде продольной и поперечной волн со скоростями

$$C_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + \nu_i \nu_j \sigma^{0}_{ij}}{\rho}} \qquad (13)$$

$$C_t = \sqrt{\frac{\mu + \nu_i \nu_j \sigma^{0}_{ij}}{\rho}} \qquad (14)$$

здесь ν_i — компоненты вектора единичной нормали к поверхности L_t.

Уравнение интенсивности возмущений получим с помощью динамических, геометрических и кинематических условий совместности на поверхности L_t.

$$\left[\frac{\partial E^{+}_{mn}}{\partial t}\right] = \frac{\delta[E_{mn}]}{\delta t} - \Pi^{+}_{mn} c \qquad (15)$$

$$\left[\frac{\partial E^{+}_{mn}}{\partial x_m}\right] = g^{ab}\frac{\partial\left[E^{+}_{mn}\right]}{\partial y^{a}} \cdot \frac{\partial x^{m}}{\partial y^{b}} + \nu_m \Pi^{+}_{mn} \qquad (16)$$

$$\left[\frac{\partial V^{+}_{m}}{\partial x_n}\right] = \nu_m T_n + g^{ab}\frac{\partial\left[V^{+}_{m}\right]}{\partial y^{a}} \cdot \frac{\partial x^{n}}{\partial y^{b}} \qquad (17)$$

$$\left[\frac{\partial V^{+}_{m}}{\partial t}\right] = \frac{\delta[V_m]}{\delta t} - cT_m \qquad (18)$$

Тогда уравнение для изменения интенсивности продольной волны с учетом (10), (11), (15)–(18) имеет вид

$$\frac{d\gamma^+}{ds} = \frac{\gamma(A+B)}{2\rho c_e^2} \qquad (19)$$

а поперечной

$$\frac{d\left[V_i^+\right]}{ds} = A_{ij}\left[V_j^+\right] + B_{ikg}\left(\left[V_k^+\right]\ \nu_g + \left[V_g^+\right]\ \nu_k\right) \quad , \qquad (20)$$

здесь $\gamma^+ = [V_i^+]\nu_i^{-1}$, коэффициенты $A, B,\ A_{ij},\ A_{ikg},\ \Pi_{mn}$ и T_m — зависят от средней кривизны поверхности, от первой и второй квадратичных форм; s — расстояние вдоль траектории луча.

Аналогично работе [4] для плоского случая (координаты — x, y) получим уравнение траектории, которое может быть приведено к виду

$$\ddot{z} + \omega^2 z + \widehat{\omega}\ \ z^3 = W(x,z) \qquad (21)$$

по математической структуре соответствующей уравнению Дуффинга. В (21) обозначим $z = y\sqrt{n}$ (n — коэффициент преломления среды, ω — собственная частота траектории возмущений, $\widehat{\omega} = 8\varepsilon^2\Pi\Omega$); $\varepsilon << 1$; $W(x,z) = zW(x)$).

Уравнение (21) можно исследовать на устойчивость известными методами [5], в том числе и в случаях задания параметров среды случайными функциями координат [6].

Литература

1. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. — М.: Наука, 1964.

2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961.

3. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. — М.: Физматлит, 2001.

4. Чигарев А.В., Чигарев Ю.В. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах. — Акустический журнал, Т.24, вып. 5,1978. с. 765-771.

5. Болотин В.В., Григолюк Э.И, Устойчивость упругих и неупругих систем. В сб. «Механика в СССР за 50 лет», М.: Наука, 1977.

6. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.