

Ю.В. Чигарев П.Н. Синкевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ПОЧВ

Допущено

Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов специальности
«Техническое обеспечение процессов сельскохозяйственного
производства» учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования

Минск
УП «Технопринт»
2004

УДК 631.43:51(075.8)

ББК 40.3я7

Ч 58

Рецензенты: *В.И. Бойков*, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Тракторы» Белорусского национального технического университета; *Л.И. Бойко*, кандидат технических наук, зам. директора по научной работе Института механики и надежности машин НАН Беларуси.

Чигарев Ю.В.

Ч 58 **Математические основы механики почв:** Учеб. пособие / Ю.В. Чигарев, П.Н. Синкевич. – Мн.: УИ «Технопринт», 2004. – 164 с.: ил.

ISBN 985-464-696-3

В пособии рассматриваются некоторые подходы, используемые в механике почвогрунтов для оценки их напряженного и деформированного состояния. В процессе изучения деформирования почвы при использовании сельскохозяйственных деформаторов необходимо применять такой математический аппарат, который бы обеспечивал корректную постановку задачи и результаты, близкие к достоверным.

Описываются физические свойства почвы, математические модели и решения отдельных задач.

Для студентов вузов сельскохозяйственных специальностей, аспирантов, научных работников.

УДК 631.43:51(075.8)

ББК 40.3я7

ISBN 985-464-696-3

© Чигарев Ю.В., Синкевич П.Н., 2004

© Оформление УИ «Технопринт», 2004

ОТ АВТОРОВ

Современные проблемы экологии Земли не могут быть полными без рассмотрения состояния агроэкологических систем, поведение которых может повлиять на устойчивость биосферы в целом. Поведение агроэкологической системы зависит от степени механического воздействия на почву и культуры земледелия.

Как известно, большинство ходовых аппаратов и орудий, используемых в сельскохозяйственном производстве, вызывает существенные изменения физико-механических, химических свойств и структуры почвы, что приводит к ее ускоренной эрозии. При этом потери компонентов почвы не компенсируются и она частично или даже полностью теряет свое плодородие. Отметим, что число «мертвых» земель, т.е. земель, непригодных для земледелия, растет.

Обостряющаяся проблема сохранения плодородия почв свидетельствует о том, что в сельскохозяйственном машиностроении были допущены определенные просчеты: при конструировании сельскохозяйственной техники фактически не учитывались физико-механические закономерности деформирования почвы, а следовательно, и допускаемые предельные нагрузки. Совершенно очевидно, что создание современной сельскохозяйственной техники, удовлетворяющей условиям агротехнической проходимости и обеспечивающей надежное сохранение плодородия земли, невозможно без широкого и глубокого изучения законов и методов, развиваемых в механике почв. Фундаментальных исследований непосредственно по механике почв очень мало, поэтому на данном этапе необходимо использовать подходы, применяемые в некоторых задачах механики деформируемого твердого тела и механики грунтов на основе аппарата механики сплошной среды.

Настоящее учебное пособие является первым по данному направлению в Республике Беларусь и базируется на научно-педагогическом опыте авторов, в течение многих лет занимавшихся вопросами агротехнической проходимости сельскохозяйственной техники и читавшими с 1987 г. курс по ме-

хашике почв в Белорусском государственном аграрном техническом университете. Известны аналогичные работы в других странах. Например, Л.Куллена и Х.Куперса «Современная земледельческая механика», изданная в Голландии, украинского ученого И.И. Водяника «Процессы взаимодействия тракторных ходовых систем с почвой», российского ученого В.А.Русанова «Проблема переуплотнения почв двигателями и эффективные пути ее решения». Данное пособие отличается тем, что в основе его лежит теория механики сплошной среды определения напряженного и деформированного состояния в почвенных элементах и массиве. Это дает возможность рассматривать задачи взаимодействия элементов сельскохозяйственной техники с почвой на основе строгого математического подхода.

Используемый в пособии математический аппарат не выходит за рамки программ по высшей математике, теоретической механики и сопротивлению материалов, изучаемых в сельскохозяйственных вузах, соответствует современным методическим требованиям, может быть освоен при самостоятельном чтении.

В первой главе рассматриваются типы, механический состав и физические свойства почв. Отдельно представлены их аэрационные и тепловые свойства.

Во второй главе на основе аппарата механики сплошной среды представлены подходы к изучению напряженного и деформированного состояния почвенных элементов. Рассматриваются понятия тензора напряжений и деформаций, выводятся уравнения движения почвенных элементов, уравнения связи между перемещениями и деформациями, инвариантные соотношения.

В третьей главе представлены некоторые реологические модели, которые могут быть использованы в исследованиях деформирования почв. Так как почву в общем случае можно представить в виде сложной реологической модели, обладающей упругими, вязкими и пластическими свойствами, то приводятся законы деформирования данных элементов. Излагаются известные критерии пластичности Губера-Мизеса и Трес-

ка-Сен-Венана. Приводятся определяющие соотношения для часто встречающихся простых и сложных моделей.

Четвертая глава посвящена методам определения напряжений в почве. Наряду с известными, традиционными задачами из механики грунтов приводятся законы деформирования, которые использовались только в оценке уплотнения почв сельскохозяйственными движителями (например, формула В.В.Кацыгина). Показано определение модуля деформации, который часто применяется в задачах механики почв как параметр, учитывающий одновременно упругие и пластические деформации.

В пятой главе излагается материал, который может быть связан с оценкой контактного взаимодействия сельскохозяйственных деформаторов с почвой. Предлагаемые методы носят классический характер, так как были апробированы во многих задачах механики деформируемого тела. На основе известных работ Л.А. Галина и А.Ю. Ишлинского рассмотрены задачи о качении колеса по жесткому и деформируемому основанию.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов сельскохозяйственных специальностей, аспирантов и научных работников. В нем содержится систематизированный теоретический материал по механике почв, который может быть использован не только в учебном процессе, но и в научных исследованиях.

СТРУКТУРНО-МЕХАНИЧЕСКИЙ СОСТАВ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЧВ

1.1. СТРУКТУРНО-МЕХАНИЧЕСКИЙ СОСТАВ ПОЧВ

Любая среда обладает некоторыми свойствами. Чем сложнее структура рассматриваемой среды, тем разнообразнее ее свойства. Почвы относятся к средам сложной структуры, которые имеют пористый и многокомпонентный состав.

В выбранном объеме почвы можно выделить четыре фазы: твердую, жидкую, газообразную и органическую. Эксперименты показывают, что органическая фаза, которая активно участвует в изменении структуры, составляет незначительный объем, поэтому в моделировании процессов механического воздействия на почву ею можно пренебречь. Почву рассматривают как трехфазную среду, единичный объем которой можно изобразить схематично (рис. 1.1). Полный объем почвенного образца

$$V = V_{СК} + V_n + V_r = V_n + V_{СК} \quad , \quad (1.1)$$

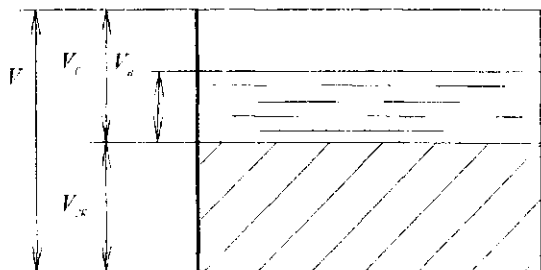


Рис. 1.1

- где $V_{СК}$ – объем твердой фазы;
 V_n – объем жидкой фазы;
 V_r – объем газообразной фазы;
 $V_n = V_n + V_r$ – объем пор.

Структура почвы в рассматриваемом объеме определяется взаимным расположением и формой агрегатов, величиной пористости, количественным соотношением фракций.

По структуре почвы делятся на морфологические и агрономические.

Морфологические почвы имеют четко выраженную структуру: зернистую, комковатую, ореховатую, столбчатую, призмovidную, пластинчатую и др. Классификация структурных отдельных морфологических почв систематизирована проф. С.А. Захаровым (табл. 1.1) [1].

Таблица 1.1

КЛАССИФИКАЦИЯ СТРУКТУРНЫХ ОТДЕЛЬНОСТЕЙ ПОЧВ

Род	Вид	Размеры, мм
Кубовидная		
<i>Грани и ребра плохо выражены</i>		
Глыбистая	крупноглыбистая	100
	мелкоглыбистая	100-50
Комковатая	крупнокомковатая	50-30
	комковатая	30-10
	мелкокомковатая	10-0,5
	пылеватая	0,5
<i>Грани и ребра хорошо выражены</i>		
Ореховатая	крупноореховатая	10
	ореховатая	0-7
	мелкоореховатая	7-5
Зернистая	крупнозернистая	5-3
	зернистая	3-1
	мелкозернистая	1-0,5
Призмovidная		
<i>Грани и ребра плохо выражены</i>		
Столбовидная	крупностолбовидная	50
	столбовидная	50-30
	мелкостолбовидная	30
<i>Грани и ребра хорошо выражены</i>		
Столбчатая	крупностолбчатая	50
	столбчатая	50-30
	мелкостолбчатая	30
Призматическая	крупнопризматическая	50
	призматическая	30
Плитовидная		
Плитчатая	станцеватая	5
	слитчатая	5-3
	пластинчатая	3-1
	листоватая	1
Чешуйчатая	скорлуповатая	3
	грубочешуйчатая	3-1
	мелкочешуйчатая	1

Агрономически ценной считается структура, которая обеспечивает почвенное плодородие. Почвы с такой структурой, как правило, имеют агрегаты размером от 0,25 до 10 мм. Более крупные агрегаты составляют глыбистую часть, а более мелкие относят к распыленной части почвы. Размеры агрегатов дифференцируют почву следующим образом:

- 1) глыбистая структура (агрегаты более 10 мм);
- 2) комковато-зернистая макроструктура (агрегаты 10 – 0,25 мм);
- 3) микроструктура (агрегаты менее 0,25 мм).

Почвы бывают связные и несвязные (сыпучие).

Несвязные почвы имеют зернистую структуру двух видов – плотную и рыхлую.

В связных почвах наблюдаются три структуры, которые содержатся в пахотном и подпахотном горизонтах:

ячеистая – свойственная пылеватым почвам, илам;

хлопьевидная – у глинистых почв;

комковатая – в поверхностном горизонте связных почв, подвергающихся процессам почвообразования.

Известно, что одним из главных диагностических признаков свойств почв, характеризующих ее производственные стороны, является механический состав. Он связан с уровнем плодородия почв, а также с ее структурными особенностями. На основе механического состава и свойства пластичности выделяют следующие градации почв:

- 1) песчаная – песок рассыпчатый, непластичный;
- 2) супесчаная (супесь) – очень слабопластичная почва;
- 3) легкосуглинистая – слабопластичная почва;
- 4) среднесуглинистая – среднепластичная почва;
- 5) тяжелосуглинистая – пластичная почва;
- 6) глина – высокопластичная почва.

Твердая фаза почв обычно состоит из совокупности агрегатов или структурных отдельностей, соединенных друг с другом коллоидным цементом. В любой почве она является разнородной полидисперсной системой. Твердая фаза почвы представлена широким спектром – от молекул до механических элементов. Последние представляют собой кусочки пород и минералов, а также аморфных соединений. Классификация механических элементов почвы представлена в табл. 1.2.

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЧВЫ

Механические элементы	Диаметр, мм
Каменистая часть почвы	3
Гравий	3 - 1
Песок крупный	1 - 0,5
Песок средний	0,5 - 0,25
Песок мелкий	0,25 - 0,05
Пыль крупная (лессовидная фракция)	0,05 - 0,01
Пыль средняя	0,01 - 0,005
Пыль мелкая	0,005 - 0,001
Ил	0,001
Ил глинистый	0,001 - 0,0005
Ил коллоидный	0,0005 - 0,0001
Коллоиды	0,0001
Физический песок	0,01
Физический глина	0,01

Под механическим составом почвы понимают соотношение частиц разной крупности в пределах непрерывного ряда определенных фракций механических элементов.

Механический состав играет важную роль в агрофизической и экологической характеристиках почв. Количество механических элементов, их размеры и форма поверхности оказывают существенное влияние на биологическую часть агроэкологической системы, которая называется биоценозом. В почвоведении обычно применяется классификация почв по механическому составу проф. Н.А. Качинского (табл. 1.3). Согласно ей почвы делятся на легкие и тяжелые.

Легкие почвы быстрее прогреваются, обладают хорошей водо- и воздухопроницаемостью, хорошо поддаются механической обработке.

Таблица 1.3

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЧВ ПО МЕХАНИЧЕСКОМУ СОСТАВУ

Краткое название почвы	Содержание физической глины (частицы 0,01 мм), %		
	подзолистый тип почвообразования	степной тип почвообразования, красноземы и желтоземы	солонцы и сильно-солонцеватые почвы
Песок рыхлый	0 - 5	0 - 5	0 - 5
Песок связный	5 - 10	5 - 10	5 - 10
Супесь	10 - 20	10 - 20	10 - 15
Суглинок легкий	20 - 30	20 - 30	15 - 20
Суглинок средний	30 - 40	30 - 45	20 - 30
Суглинок тяжелый	40 - 50	45 - 60	30 - 40
Глина легкая	50 - 65	60 - 75	40 - 50
Глина средняя	65 - 80	75 - 85	50 - 65
Глина тяжелая	80	85	65

Однако они подвержены ветровой эрозии, особенно в тот период, когда лишены растительного покрова. К легким почвам относятся песчаные, супесчаные и легкосуглинистые.

К тяжелым почвам относят суглинистые и глинистые. Они содержат больше гумуса и питательных веществ, обладают высокой связностью и влагоемкостью. Однако при интенсивной обработке современной сельскохозяйственной техникой структура тяжелых почв значительно ухудшается. При увлажнении это приводит к избытку влаги в почве, а следовательно, увеличению липкости, а при подсыхании - к образованию глыбистости и почвенной корки.

Наиболее оптимальное сочетание элементов и условий, определяющих плодородие, - у среднесуглинистых почв.

Влияние механического состава почвы на удельное сопротивление и износ рабочих органов почвообрабатывающих орудий при вспашке приведено в табл. 1.4.

Таблица 1.4

ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТАВА ПОЧВЫ НА УДЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ИЗНОС РАБОЧИХ ОРГАНОВ ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩИХ ОРУДИЙ ПРИ ВСПАШКЕ

Почвы	Удельное сопротивление, кг/см ²	Удельный износ лемехов, г/га
Глинистые	0,7 - 0,8	2 - 10
Суглинистые:		
тяжелые	0,5 - 0,7	
средние	0,4 - 0,5	20 - 30
легкие	0,3 - 0,4	
Супесчаные	0,2 - 0,3	70 - 100
Песчаные	0,2	
Песчаные каменистые	-	200 - 300

Отметим, что в зависимости от зонно-климатических условий почвы одного и того же механического состава могут иметь разные агрофизические свойства.

Почвы классифицируются не только по механическому составу, но и по генетическому. Так, В.В. Докучаев предложил следующую классификацию. Нормальные типы почв: 1 - светло-серые северные (подзолистые); 2 - серые лесные; 3 - черноземные; 4 - каштановые; 5 - бурые солонцеватые. В свою очередь каждый из приведенных типов подразделяется на группы: песчаные, супесчаные, легкосуглинистые, тяжелосуглинистые и глинистые.

1.2. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЧВ

Все типы почв подвержены уплотнению: в меньшей степени пески и черноземы, в большей степени пылевато-иловые суглинки в период обработки и поливов полей.

Степень уплотнения почв ходовыми системами и сельскохозяйственными орудиями оценивается на основе целого ряда физических характеристик, выявляемых путем проведения опытов в полевых условиях или при испытаниях в лабораториях образцов почвы с ненарушенной структурой.

Приведем некоторые основные физические характеристики почв.

Плотность почвы естественной структуры. Плотность почвы (г/см^3) определяется как отношение массы почвенного образца m_p к ее объему V :

$$\rho = \frac{m_p}{V}. \quad (1.2)$$

Плотность зависит от упаковки почвенных агрегатов. Свободная упаковка характеризуется пониженной плотностью, которая присуща верхним горизонтам пахотных и целинных земель. В богатых гумусом почвах плотность верхних горизонтов колеблется от 1,0 до 1,3 г/см^3 . В почвах с низким содержанием гумуса она изменяется от 1,3 до 1,45. В подпахотном уплотненном слое плотность достигает 1,5 – 1,6, а на глинистых почвах 1,6 – 1,9 г/см^3 [4].

Пахотный слой уплотняется под воздействием как климатического, так и механического воздействия.

На рис.1.2 показано изменение в осенне-зимне-весенний период высоты взрыхленной почвы в зоне умеренного климата, после осенней обработки почвы [2]. После осенней вспашки подъем поверхности почвы составляет около 7 см, а перед посевом – 3,5 см. Из графика следует, что осадки сильно влияют на уплотняемость почвы, а морозы могут быть причиной некоторого увеличения порозности.

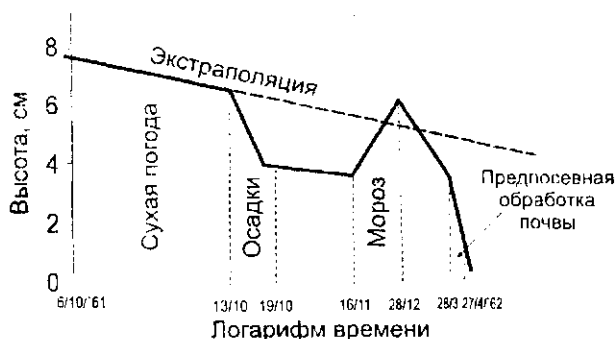


Рис. 1.2

Плотность, до которой почва способна уплотняться под влиянием климатических условий и собственной силы тяжести, называется равновесной. Ее значения колеблются в пределах 1,25 – 1,45 г/см³.

Благоприятные условия для жизнедеятельности микроорганизмов и роста растений обеспечивает оптимальная плотность 1,0 – 1,25 г/см³.

Плотность твердых частиц почвы. Определяется отношением

$$\rho_s = \frac{m_{ск}}{V_{ск}}, \quad (1.3)$$

где $m_{ск}$ – масса скелета (твердых частиц) почвы.

Для большинства почв ρ_s меняется незначительно: от 2,55 до 2,7 г/см³. В среднем плотность песчаных почв – 2,6, а глинистых – 2,7 г/см³.

Плотность сухой почвы (объемная масса). Определяется из уравнения

$$\rho_d = \frac{m_{ск}}{V} = \frac{m_{ск}}{V_{ск} + V_{п}}. \quad (1.4)$$

Для расчетов плотность сухой почвы удобно вычислять в виде

$$\rho_d = \frac{\rho}{1 + 0,01w}, \quad (1.5)$$

где w – влажность почвы.

Пористость почвы. Этот показатель играет одну из основных ролей в жизнедеятельности микроорганизмов и растений. Введем коэффициент пористости

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_{ск}} \quad (1.6)$$

В единичном объеме обозначим $V_{ск} = m$; $V_n = n$, тогда

$$m + n = 1$$

и уравнение (1.6) можно переписать

$$\varepsilon = \frac{n}{1 - n} \quad (1.7)$$

откуда

$$n = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (1.8)$$

Если выражение (1.8) подставить в (1.6), то

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{m(1 + \varepsilon)},$$

или

$$m = \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (1.9)$$

Влажность. Исключительно большую роль в биологической активности почв играет вода. Обладая терморегулирующими свойствами, она определяет расход тепла из почвы вследствие испарения, а также из растений путем транспирации (испарения влаги через листья). Процессы миграции микробиоценоза, питательных веществ связаны с водным режимом почв. Известно также, что изменение содержания воды в почвах резко отражается на их прочностных свойствах. Урожайность большинства сельскохозяйственных культур зависит от вида влаги в почве. Согласно [3], различают следующие ее виды: кристаллизационная, твердая (лед), парообраз-

ная, прочносвязанная, свободная (стыковая, капиллярно-подвижная, сорбционно-замкнутая и др.). Для оценки влажности почвы обычно выбирается весовая или объемная влажность.

Весовая влажность определяется как отношение массы воды в почве m_B к массе сухой почвы $m_{сх}$ и выражается в процентах:

$$w = \frac{m_B}{m_{сх}} \cdot 100\% . \quad (1.10)$$

Объемная влажность определяется как отношение объема воды V_B , заключенной в почве, к объему всей почвы V :

$$w_v = \frac{V_B}{V} \cdot 100\% . \quad (1.11)$$

Учитывая, что плотность воды $\rho_B \approx 1$ г/см³, связь между весовой и объемной влажностью будет определяться соотношением [3]

$$w_v = \rho_d w . \quad (1.12)$$

Общее содержание влаги в почве называют *абсолютной влажностью*. В практике часто используют понятие *относительной влажности* (%):

$$w_{отн} = \frac{100w}{w_{об}} , \quad (1.13)$$

где w — влажность почвы в данный момент;]

$w_{об}$ — общая влагоемкость.

Общая (наименьшая) влагоемкость определяется количеством влаги, которую почва удерживает после увлажнения при свободном оттоке гравитационной воды. Из формулы (1.13) видно, что относительная влажность — это отношение содержания влаги в данный момент к количеству воды, насыщающей почву до ее общей (полевой) влагоемкости, т.е. характеризует степень смоченности почвы. Разные типы почв, несмотря на различную общую влажность, могут иметь одинаковую относительную влажность. Так, супесчаная почва общей влагоемкостью 10% и при влажности 5% будет иметь

$$w_{\text{отн}} = \frac{500}{10} = 50 \% .$$

И у тяжелосуглинистой почвы при $w_{\text{отн}}=30\%$ и $w = 15 \%$ относительная влажность тоже будет равна 50%. Есть и другие методы определения влажности.

Введем коэффициент водонасыщенности почвы [4]

$$G_w = \frac{w}{w_{\text{max}}} , \quad (1.14)$$

где w_{max} — влажность, соответствующая полному заполнению пор в почве.

При неполном водонасыщении $G_w < 1$. В этом случае почва является 3-фазной средой. При $G_w = 1$ имеем водонасыщенную почву, т.е. 2-фазную среду.

Рассмотрим другие физические свойства почв.

Пластичность — способность почвы изменять свою форму под влиянием внешней силы и сохранять приданную форму после устранения этой силы. Пластичность проявляется только при увлажнении почвы и тесно связана с ее механическим составом (глинистые почвы пластичны, песчаные почвы не пластичны). При содержании в почве натрия ее пластичность усиливается, а при насыщении кальцием — снижается. Высокое содержание гумуса уменьшает пластичность почвы.

Диапазон влажности, при которой почва будет пластичной, характеризуется числом пластичности

$$J_p = w_L - w_p , \quad (1.15)$$

где w_L — граница влажности, при которой почва переходит в текучее состояние;

w_p — граница раскатывания, соответствует влажности, при которой почва теряет свою пластичность. Она приблизительно равна влажности жгута (толщиной 3 мм), сделанного из почвы и раскатываемого на бумаге до потери им пластичности.

Липкость – способность почвы прилипать к различным поверхностям. В результате прилипания увеличивается тяговое сопротивление и ухудшается качество обработки почвы. Липкость возрастает при увлажнении. С ней связано такое важное агрономическое свойство почвы, как *физическая спелость*, когда почва не прилипает к орудиям, способна крошиться на комки.

Набухание – увеличение объема почвы при увлажнении. Вследствие набухания частицы могут быть настолько разделены пленками воды, что это приведет к разрушению структурных отдельностей.

Усадка – сокращение объема пор при высыхании. При высушивании почвы вследствие усадки появляется трещиноватость.

1.3. АЭРАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОЧВ

Почвенный воздух отличается от атмосферного количественным и качественным составом. Так, содержание углекислого газа в нем в десятки раз больше, чем в атмосферном. Для жизнедеятельности корневой системы и микроорганизмов необходим кислород, который содержится в нужном количестве в почвенном воздухе только при нормальном газообмене. При его нарушении количество кислорода в почвенном воздухе может падать до десятых долей процента, а углекислоты – увеличиваться до 10 и более обменных процентов [3].

По физическому состоянию почвенный воздух делят на свободный, адсорбированный и растворенный.

Свободный воздух содержится в крупных капиллярных и некапиллярных порах почвы. Наиболее важное значение в жизни растений играют некапиллярные поры, заполненные воздухом. Воздух некапиллярных пор характеризуется большой подвижностью и доступностью. Поры обуславливают постоянную аэрацию почвы. При уменьшении диаметра пор подвижность воздуха снижается. В замкнутых порах, не сообщающихся с атмосферой, находится заземленный воздух, который частично обуславливает упругие деформации почвы.

Объем заземленного воздуха в почве определяется как разность между скважностью и объемом пор, занятых водой, который соответствует величине водовместимости, или полной влагоемкости.

Сухие почвы способны сорбировать (поглощать) значительное количество газов, находящихся в почве. В результате поглощения происходит несколько процессов: адсорбция, абсорбция, хемосорбция. Адсорбция — это процесс сгущения газа на поверхности почвенных частиц; абсорбция — физико-химическое поглощение газов твердой и жидкой фазами почвы; хемосорбция — поглощение за счет химического взаимодействия между почвой и газом. Наибольшей поглотительной способностью среди компонентов почвы обладают гумус и полуторные окислы. В меньшей степени это относится к кварцу, извести и гипсу.

Адсорбция газов достигает максимального значения в абсолютно сухих почвах.

Компоненты почвенного воздуха растворимы в воде. Растворимость газов возрастает с увеличением их парциального давления и снижением температуры. Минерализация воды уменьшает растворимость газов. При полном насыщении всех пор водой в почве будет присутствовать только растворенный воздух.

Рассмотрим физические свойства почв, которые определяют количественный и качественный составы почвенного воздуха.

Воздухоемкость — это способность почвы удерживать при определенном физическом состоянии то или иное количество воздуха. Максимальной воздухоемкостью обладают абсолютно сухие почвы. В общем случае воздухоемкость равна разности между общим объемом пор и объемом пор, занятых водой. Если объем пор, занятых воздухом, при общей влагоемкости меньше 10 — 15% объема почвы, то аэрация почвы будет недостаточной для жизнедеятельности растений, поэтому требуются агромероприятия по улучшению структуры почвы.

Воздухопроницаемостью называется скорость проникновения воздуха или газа в почвенную толщу. В природных усло-

виях воздух в почву проникает под влиянием атмосферного давления или воды, затопляющей поверхность почвы во время сильных дождей, снеготаяния и наводнения.

Мерой воздухопроницаемости служит количество воздуха (в мл), прошедшего под определенным давлением в единицу времени через площадь сечения почвы 1 см^2 при толщине слоя 1 см .

Газообмен между почвой и атмосферой обусловлен многими факторами: диффузией газов, изменением температуры почвы и барометрического давления, вытеснением воздуха из почвы при выпадении осадков или орошении, направлением и силой ветра. Перечисленные факторы неодинаково, конечно, влияют на газообмен.

Запишем уравнение для диффузионного газообмена. Известно, что обычной, или концентрационной диффузией называют процессы перемещения частиц газовой смеси от участков большей концентрации - к меньшим. Согласно первому закону Фика, количество переносимого вещества в одномерном случае [12]

$$Q = -DSt \frac{dc}{dx}, \quad (1.16)$$

где D — коэффициент диффузии, равный количеству вещества, диффундирующего через слой площадью 1 см^2 и толщиной 1 см за 1 с при $\frac{dc}{dx} = 1$ (размерность $D \sim \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$);

S — площадь сечения, см^2 ;

$\frac{dc}{dx}$ — градиент концентрации вдоль диффузионного потока X ;

c — концентрация.

При изучении процессов диффузии газов может быть использован и второй закон Фика. В одномерном случае

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (1.17)$$

В случае трехмерной диффузии изменение концентрации с течением времени при постоянной температуре описывается уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial c}{\partial z} \right). \quad (1.18)$$

Если коэффициент диффузии D не зависит от концентрации, то уравнение (1.18) приводится ко второму закону Фика:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c, \quad (1.19)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Скорость диффузии ν часто определяют по формуле

$$\nu = \frac{D}{D_0}, \quad (1.20)$$

где D_0 — коэффициент диффузии газа в атмосферу.

Для измерения коэффициента диффузии D используют кинетический метод, с помощью которого определяют изменение концентрации диффундирующего вещества во времени в диффузиометре [3].

1.4. ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ПОЧВ

Основным источником теплоты в почве является солнечная радиация. Другими источниками служат некоторые элементы земной коры при радиоактивном распаде, биологические процессы и химические реакции, смачивание сухой почвы.

В верхние слои атмосферы поступает количество теплоты, равное 1312 Дж/см^2 . Однако у самой поверхности Земли ее

значительно меньше в результате отражения. Земля теряет теплоту I_3 за счет излучения ее в атмосферу и приобретает теплоту, излучаемую облаками I_0 .

Эффективное излучение теплоты почвой

$$I_{\text{эф}} = I_3 - I_0. \quad (1.21)$$

Алгебраическая сумма прихода и расхода солнечной энергии называется *радиационным балансом*:

$$R_0 = (Q + q)(1 - A) - I_{\text{эф}}, \quad (1.22)$$

где Q — прямая солнечная радиация;
 q — рассеянная солнечная радиация;
 A — альбедо-излучение.

Анализ формулы (1.22) показывает, что чем выше A , тем меньше нагревается поверхность почвы. Альбедо-излучение зависит от рельефа почвы, ее окраски, влажности и растительного покрова.

Радиационный баланс расходуется на испарение влаги из почвы Φ , турбулентный обмен с атмосферой P и на нагревание почвы B , т. е.

$$R_0 = \Phi + P + B, \quad (1.23)$$

где $\Phi = EL$ (E) — испарение, мм;

L — скрытая теплота испарения, обычно $L = 60$ кал на 1 мм.

Выражение (1.23) называется *уравнением теплового баланса*. Поток тепла в почву

$$B = \frac{K_t(t_1^0 - t_2^0)}{e}, \quad (1.24)$$

где K_t — коэффициент температуропроводности почвы;

t_1^0 и t_2^0 — соответственно температура верхней и нижней частей слоя почвы мощностью 1 см.

Температуропроводность определяет способность почвы выравнивать свою температуру при наличии разницы нагрева в данной и соседней точках [12].

Коэффициент K_1 характеризует скорость выравнивания температуры в неравномерно нагретой почве:

$$K_1 = \frac{\lambda}{C_1} \quad (1.25)$$

где λ — коэффициент теплопроводности;

C_1 — коэффициент объемной теплоемкости почвы.

Теплопроводность возникает при наличии градиента температуры и в одномерном стационарном случае ($T=T(x)$) описывается уравнением Фурье:

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} dS dt \quad (1.26)$$

где dQ — количество теплоты, переносимое за время dt через площадку dS в направлении нормали x к этой площадке в сторону убывания температуры;

$\frac{dT}{dx}$ — градиент температуры.

Коэффициент теплопроводности λ равен количеству теплоты, прошедшего за 1 с через почву сечением 1 см^2 при толщине слоя 1 см и температурном градиенте на концах слоя 1°C .

Коэффициент теплопроводности в СИ измеряется в $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^\circ\text{C}}$.

Теплопроводность почвы зависит от теплопроводности ее твердой, жидкой и газообразной фаз. Коэффициент теплопроводности твердой фазы равен $0,38 - 2,43$, жидкой - $0,52$, воздуха - $0,15$.

Теплоемкостью C ($\frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}}$) почвы называется отношение элементарного количества теплоты Q , сообщенного почве, к соответствующему изменению температуры тела:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (1.27)$$

Удельной теплоемкостью массы C_e называют количество теплоты в джоулях, необходимое для нагревания 1 г абсолютно сухой почвы на 1°C.

Объемная удельная теплоемкость C_v - это количество теплоты необходимое для нагревания 1м³ сухой почвы на 1°C. Величины C_b и C_v связаны соотношением

$$C_v = C_b \rho, \quad (1.28)$$

где ρ - плотность твердой фазы почвы.

Объемная теплоемкость зависит от теплоемкости твердой, жидкой и газообразной фаз почвы.

Прогревание почвы вглубь прямо пропорционально ее теплопроводности и обратно пропорционально теплоемкости. Методы исследования тепловых свойств почв подробно изложены в [3].

Выведем дифференциальное уравнение теплопроводности. Рассмотрим тепловой процесс с нестационарным температурным полем, т.е. когда значения температуры меняются в каждой точке во времени. Такой процесс можно описать уравнением Фурье. В основе его лежит закон сохранения энергии: количество теплоты, введенное в элементарный объем dV за время $d\tau$ вследствие теплопроводности, равно изменению внутренней энергии вещества, содержащегося в этом объеме.

Предположим, почва обладает свойствами однородности и изотропности. Выделим из почвенного массива элементарный параллелепипед с гранями dx, dy, dz и рассмотрим баланс теплоты в этом объеме. Очевидно, что температура будет меняться вдоль осей x, y, z .

Через три грани рассматриваемого параллелепипеда в направлении трех осей будет входить количество теплоты, равное Q_1, Q_3, Q_5 и, соответственно, через три противоположные грани будет входить количество теплоты, равное Q_2, Q_4, Q_6 .

Уравнение теплового баланса данного объема будет

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 = Q_7, \quad (1.29)$$

где Q_7 — энтальпия (функция состояния рассматриваемого тела).

Запишем значения составляющих теплового баланса:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= q_x dx dy d\tau; \\ Q_2 &= -\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau; \\ Q_3 &= q_y dx dy d\tau; \\ Q_4 &= -\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx dz d\tau; \\ Q_5 &= q_z dx dy d\tau; \\ Q_6 &= -\left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx dy d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

где q_x, q_y, q_z — удельные тепловые потоки через грани соответственно в направлении осей x, y, z ;

$\frac{\partial q_x}{\partial x}, \frac{\partial q_y}{\partial y}, \frac{\partial q_z}{\partial z}$ — изменение удельных потоков внутри выделенного объема вдоль осей x, y, z ;

$\frac{\partial t}{\partial \tau}$ — изменение температуры в объеме за время dt .

Учитывая, что энтальпия определяется как количество внутренней энергии (теплоты), которым обладает тело при данной температуре t , для определенного тела имеем

$$Q = C_v \rho V t, \quad (1.31)$$

где V — объем тела.

Для заданного объема в случае неоднородного тела энтальпия

$$Q_7 = C_{b\rho} dx dy dz \frac{\partial t}{\partial \tau} dt. \quad (1.32)$$

Подставляя формулы (1.32), (1.30) в (1.29), после несложных преобразований получаем

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{C_{b\rho}} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \right). \quad (1.33)$$

Согласно закону Фурье, удельный тепловой поток пропорционален градиенту температуры, т. е.

$$g = \lambda \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.34)$$

где n — нормаль к изотермической поверхности.

Поэтому выражение (1.33) с учетом (1.34) можно переписать:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{C_{b\rho}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] \quad (1.35)$$

или

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t, \quad (1.36)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа;

$a = \frac{\lambda}{C_{b\rho}}$ — коэффициент температуропроводности.

Используя связь между прямоугольными и цилиндрическими координатами

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi; z = z, \quad (1.37)$$

уравнение теплопроводности можно записать

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} \right). \quad (1.38)$$

В случае стационарного температурного поля уравнение (1.36) имеет вид

$$\nabla^2 t = 0 \quad (1.39)$$

или

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (1.40)$$

При стационарном режиме температурное поле не зависит от коэффициента температуропроводности a и, следовательно, от коэффициента теплопроводности.

Процесс испарения воды и таяния снега на полях сопровождается поглощением теплоты, а замерзание и занос снегом, наоборот, ее выделением. Таким образом, почва может быть как источником, так и стоком теплоты. При учете в почве источника или стока уравнение теплового баланса (1.29) дополняется еще одним членом:

$$Q_8 = W dx dy dz d\tau, \quad (1.41)$$

где Q_8 — количество теплоты, выделенное или поглощенное средой в объеме за время dt ;

W — интенсивность источника или стока.

С учетом формулы (1.41) уравнение теплопроводности будет

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{C_b \rho} W \quad (1.42)$$

или

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{1}{C_b \rho} W \quad (1.43)$$

Если в почве есть процесс стока, то перед последним слагаемым в правой части выражения (1.43) надо поставить знак «минус».

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЧВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

2.1. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЧВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Как уже отмечалось, почвы имеют многокомпонентный состав и пористое строение. Разнообразие свойств почв и сложность процессов их деформирования приводят к большому различию в методике их изучения и построения моделей при решении различных задач земледельческой механики. Наиболее часто почвы, несмотря на многокомпонентный состав, рассматриваются как сплошные среды, и их исследование проводится на феноменологическом уровне. Для изучения теоретических основ деформирования почвы вводится принцип эквивалентной гомогенности, или гипотеза континуума. Эта гипотеза включает процедуру статистического осреднения, посредством которой действительное состояние и структура почвы идеализируются таким образом, что среда считается однородным континуумом. Однородность характеризуется одинаковостью свойств элементов, выделенных из почвенного массива.

При воздействии на почву рабочих органов и ходовых систем происходит сближение частиц или их удаление друг от друга, обусловленное силовым взаимодействием между ними. Для описания этого взаимодействия вводится силовая характеристика, которая называется напряжением.

Определение напряжений в почвенном массиве имеет особое значение для оценки тягово-сцепных и агротехнических свойств проходимости, деформаций почвы и глубины колеи, износа сельскохозяйственных орудий и выявления закономерностей изменения структурного состава почвы.

Рассмотрим в полупространстве движение какого-нибудь рабочего органа сельскохозяйственного орудия, например зуба или культиваторной лапы [2]. При обработке почвы со стороны

рабочего органа на почву действует сила. Прилагаемое к почве усилие вызывает с ее стороны реакцию. Определим усилие в точке A поверхности рабочего органа (рис.2.1). В небольшой окрестности ds точки A будет действовать сумма сил $\sum \bar{F}_k^{(ds)}$.

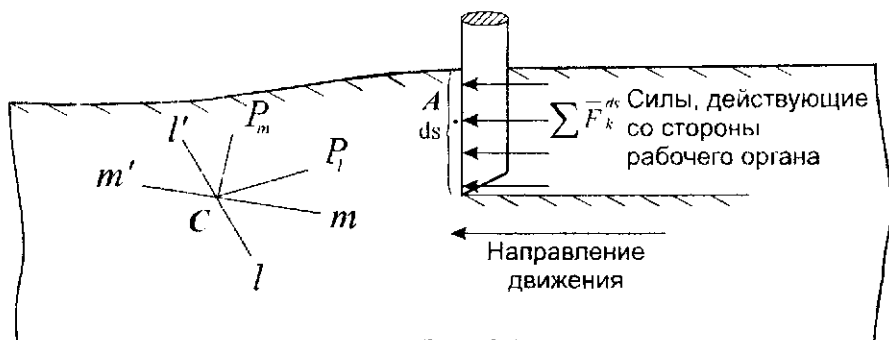


Рис. 2.1

Если записать соотношение $\frac{\sum \bar{F}_k^{(ds)}}{dS}$, то его значение очевидно будет зависеть от положения и величины dS . Так, при расположении dS выше или ниже на рабочем органе получим разные значения $\sum \bar{F}_k^{(ds)}$.

Если устремить $dS \rightarrow 0$, то предельное соотношение

$$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\sum \bar{F}_k^{(ds)}}{dS} = \bar{\sigma} \quad (2.1)$$

определил величину, которая называется напряжением σ на поверхности рабочего органа в точке A . При работе сельскохозяйственных орудий и движителей напряжения возникают не только в точках контакта деформатора с почвой, но, как показывают опыты, напряжения распространяются вглубь и вширь от области контакта на 0,6 – 1,0 м, что ведет к деформированию не только пахотного, но и подпахотного слоя. Поэтому определим напряжения в точках почвенного массива. Выберем некоторую точку C рассматриваемого полупрост-

ранства (рис.2.1), проведем через нее плоскость $l'l'$. В окрестности точки C возьмем малую площадку dL , принадлежащую плоскости $l'l'$, на которую действует сумма сил

$$\sum \bar{P}_k^{(dl)}.$$

Согласно формуле (2.1) напряжение, действующее на площадку dL , будет

$$\lim_{dl \rightarrow 0} \frac{\sum \bar{P}_k^{(dl)}}{dL} = \bar{\sigma}_l.$$

Если взять плоскость mm' с той же площадкой, то на нее будет действовать напряжение σ_m , отличное от σ_l . Очевидно, что $\sigma_l > \sigma_m$. Через точку C можно провести бесконечное множество различных плоскостей и, следовательно, получить такое же количество действующих на эту точку напряжений. Таким образом, указанный подход нельзя использовать при определении напряжений, ибо ни число, ни вектор $\bar{\sigma}$ не могут однозначно характеризовать напряженное состояние точки C .

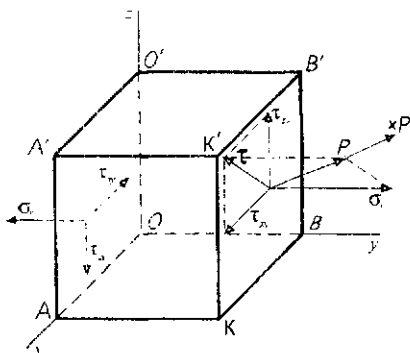


Рис. 2.2

Для исследования напряженного состояния в точке C вырежем в окрестности этой точки элементарный параллелепипед, ребра которого равны dx , dy , dz . Если обозначить DP внутреннее усилие, действующее на элементарную площадку, например $BKK'B'$ (рис.2.2), то напряжение, действующее на эту площадку, будет [5]

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S},$$

где S — площадь элементарной площадки $BKK'B'$.

В случае уменьшения граней элементарного параллелепипеда P будет характеризовать величину полного напряжения в точке C на площадке, перпендикулярной к оси y . Это напряжение можно разложить на нормальную к площадке составляющую σ_y и касательную τ . При этом τ в свою очередь можно разложить на направления τ_{xy}, τ_{zy} , параллельные осям x и z . Аналогичным образом на других гранях параллелепипеда можно получить нормальные напряжения σ_x, σ_y и касательные напряжения $\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Индекс при нормальных напряжениях показывает, вдоль какой оси выбрано напряжение. Для касательных напряжений первый индекс указывает направление, а второй — к какой оси перпендикулярна площадка.

Рассмотрим равновесие тетраэдра, три грани которого являются координатными площадками, т.е. совпадают с координатными плоскостями, а четвертая наклонена к координатным осям (рис. 2.3).

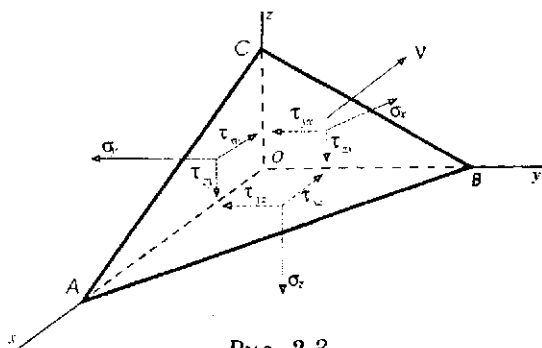


Рис. 2.3

Наклон грани ABC определяется величинами направляющих косинусов нормали ν к граням ABC . Обозначим l, m, n косинусы углов между осями x, y, z и направлением нормали n :

$$\cos(\nu, x) = l, \quad \cos(\nu, y) = m, \quad \cos(\nu, z) = n.$$

Исследуем напряженное состояние в точке O . В случае бесконечного уменьшения граней тетраэдра наклонная грань ABC в пределе будет проходить через точку O .

Полное напряжение P_v , действующее на площадке ABC , разложим на составляющие P_x, P_y, P_z , параллельные координатным осям.

Из условий равновесия тетраэдра имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ P_y &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ P_z &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

При составлении уравнений (2.2) не учитывалась объемная сила. Составляющие P_x, P_y, P_z образуют с нормалью углы, косинусы которых соответственно равны l, m, n . Поэтому нормальное к наклонной площадке напряжение σ_v через проекции полного напряжения можно определить по формуле

$$\sigma_v = P_x l + P_y m + P_z n$$

или

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} l m + 2\tau_{yz} l n + 2\tau_{zx} m n. \quad (2.3)$$

Касательное напряжение

$$\tau_v = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - \sigma_v^2 = P_v^2 - \sigma_v^2 \quad (2.4)$$

Таким образом, σ_v и τ_v , действующие на наклонной площадке, можно выразить через известные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$, полностью характеризующие напряженное состояние в данной точке O . Они являются элементами так называемого тензора напряжений, который представим в виде матрицы

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Если используется ортогональная декартова система координат X_1, X_2, X_3 трехмерного евклидова пространства, и при этом принимают обычное условие суммирования по повторяющимся индексам, то тензор напряжений будет иметь вид

$$T_n = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Первый индекс показывает, на какой площадке действует напряжение, а второй — в каком направлении. В соответствии с этим σ_{ij} при $i \neq j$ называются касательными (сдвигающими) напряжениями, σ_{ij} при $i=j$ — нормальными напряжениями ($i, j = 1, 2, 3$). Оси координат, по которым касательные напряжения равны нулю, называются главными осями тензора напряжений, а соответствующие нормальные напряжения — главными значениями тензора напряжений.

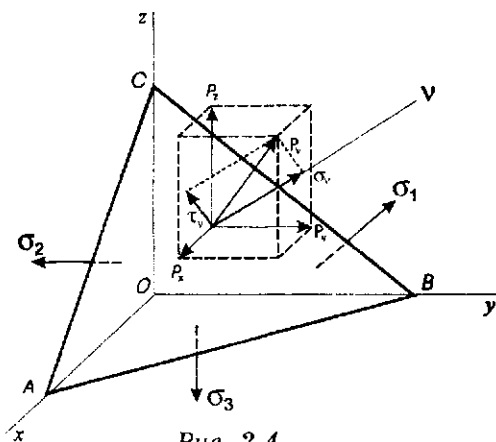


Рис. 2.4

Нормальное напряжение обычно считается положительным, если оно вызывает растяжение почвенного элемента, и отрицательным, — если сжатие. Сдвигающие напряжения также положительны и направлены в сторону отрицательных направлений соответствующих осей координат, если внешняя нор-

малы к площадке совпадает с отрицательным направлением координатной оси.

Чтобы получить уравнения движения абсолютно твердого тела, необходимо и достаточно приравнять нулю главный вектор и главный момент действующих на него внешних сил и сил инерции.

Для составления уравнений движения деформированного тела необходимо и достаточно приравнять нулю главный вектор, главный момент сил и сил инерции, приложенных к любой части тела, которую можно мысленно из него выделить.

Выделим в почвенном массиве некоторый произвольный объем V , ограниченный поверхностью S (в частности, это может быть и рассматриваемый куб). Пусть на элемент dS поверхности выделенного объема действует сила $d\bar{P}$, тогда вектор

$$\bar{\Phi}_n = \frac{d\bar{P}}{dS} \quad (2.7)$$

представляет собой силу, отнесенную к единице площади поверхности тела в некоторой точке O (рис.2.4). Главный вектор и главный момент поверхностных сил, приложенных ко всей поверхности S ,

$$\bar{R} = \int_S \bar{\Phi}_n dS ; \quad (2.8)$$

$$\bar{L} = \int_S (\bar{r} \times \bar{\Phi}_n) dS , \quad (2.9)$$

где \int_S — поверхностный интеграл;

\bar{r} — радиус-вектор точки приложения силы относительно начала координат.

Если γ — плотность почвы, то масса элементарного объема dV равна $dm = \gamma dV$. Пусть на эту массу действует сила $d\bar{Q}$, тогда вектор $\bar{F} = d\bar{Q}/dm$ представляет собой силу, отнесенную к единице массы в данной точке. Силы \bar{F} называются массовыми. Кроме поверхностных $\bar{\Phi}_n$ и массовых сил \bar{F} , существуют объемные силы

$$\bar{F}_V = \frac{d\bar{Q}}{dV} = \rho \frac{d\bar{Q}}{dm} = \rho \bar{F}. \quad (2.10)$$

Главный вектор и главный момент объемных сил, приложенных ко всему объему, найдем из уравнений

$$\bar{R} = \int_V \rho \bar{F} dV; \quad (2.11)$$

$$\bar{L} = \int_V \rho (\bar{r} \times \bar{F}) dV, \quad (2.12)$$

где \int_V — объемный интеграл.

Для составления уравнения движения почвенного элемента объемом V запишем уравнения:

$$\int_V \rho (\bar{F} - \bar{a}) dV + \int_S \bar{\Phi}_n dS = 0; \quad (2.13)$$

$$\int_V [\bar{r} \times \rho (\bar{F} - \bar{a})] dV + \int_S (\bar{r} + \bar{\Phi}_n) dS = 0, \quad (2.14)$$

где \bar{a} — ускорение.

Левая часть уравнения (2.13) представляет собой главный вектор объемных, поверхностных сил и сил инерции $\rho \bar{a} dV$. Левая часть уравнения (2.14) — главный момент объемных, поверхностных сил и сил инерции. Следует отметить, что присутствие сил инерции в этих выражениях связано только с динамическим воздействием на почвенный элемент. Из формулы (2.13) с учетом (2.6) с помощью ряда преобразований [5] можно получить уравнение движения почвенного элемента. Относительно координатных осей x_1, x_2, x_3 имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho F_1 &= \rho a_1; \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho F_2 &= \rho a_2; \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 &= \rho a_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho a_i. \quad (2.16)$$

Если рассматриваемый элемент почвенной среды находится в равновесии, то силы инерции равны нулю, и выражение (2.16) можно записать:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0. \quad (2.17)$$

При отсутствии массовых сил F_i уравнения равновесия принимают совсем простой вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.18)$$

Из условия равенства нулю главного момента всех сил, действующих на элементарный объем и силы инерции, легко показать [5], что тензор напряжения симметричен:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.19)$$

Всегда можно выбрать такую систему координат, в которой T_{ij} примет вид

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

Если одно из трех напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ больше, чем оба другие, то это напряжение называется первым главным напряжением и обозначается σ_1 . Наименьшее из этих трех напряжений является третьим главным напряжением σ_3 . Оставшееся напряжение называется вторым главным напряжением σ_2 . Таким образом, главные напряжения, действующие на этих плоскостях, будут:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2.21)$$

В направлении главных напряжений выбираются оси координат, которые называются главными осями. Матрица, принадлежащая главным осям, имеет вид

$$T_n = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (2.22)$$

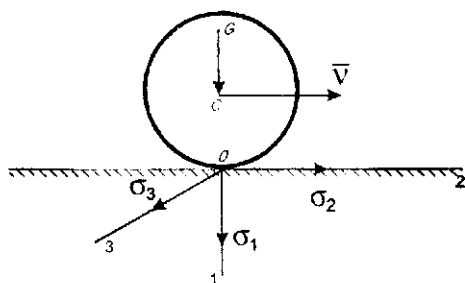


Рис. 2.5

В силу своей простоты эта матрица наиболее удобна для определения напряжения в точке и используется, если известны направления главных осей. Например, для ведущего колеса трактора без тяговой нагрузки [5] под центром колеса главные оси расположены, как показано на рис.2.5. В зависимости от осевой нагрузки G главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ будут принимать соответствующие значения, в частности при $\sigma_1 = 300$ кПа, $\sigma_2 = 150$ кПа, $\sigma_3 = 100$ кПа можно записать

$$T_{ii} = \begin{vmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix}.$$

Главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$ являются действительными корнями кубического уравнения

$$|\sigma_{ii} - \sigma \delta_{ij}| = 0, \quad (2.23)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

В развернутом виде уравнение записывается как [6, 7]

$$\sigma^3 - J_1(T_{ii})\sigma^2 - J_2(T_{ii})\sigma - J_3(T_{ii}) = 0. \quad (2.24)$$

Коэффициенты J_1 , J_2 , J_3 , входящие в данное уравнение, не зависят от положения системы координат и поэтому являются инвариантами тензора напряжений T_{ii} . Первый инвариант представляет собой сумму нормальных напряжений

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{ii} \quad (2.25)$$

и определяет среднее (гидростатическое) напряжение в точке

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (2.26)$$

Второй инвариант имеет вид

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}). \quad (2.27)$$

Третий инвариант записывается так:

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = |\sigma_{ij}|. \quad (2.28)$$

При установлении связи между напряжениями и деформациями важную роль играет девиатор напряжений, компоненты которого определяются из соотношения

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\delta_{ij}. \quad (2.29)$$

Инварианты девиатора тензора напряжений будут иметь вид:

$$J_1(S) = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0; \quad (2.30)$$

$$J_2(S) = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{32} \\ S_{23} & S_{33} \end{vmatrix};$$

$$J_3(S) = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}.$$

В некоторых случаях инварианты могут принимать нулевые значения. Например, если $J_3 = 0$, то один из корней уравнения (2.23) также равен нулю, и тело находится в плоском (двухосном) состоянии. В частности, при чистом сдвиге осуществляется плоское напряженное состояние

$$\sigma_1 = -\sigma_3 \quad \text{и} \quad \sigma_2 = 0. \quad (2.31)$$

Если $J_2 = J_3 = 0$, то уравнение (2.23) имеет два нулевых корня и только одно из главных напряжений отлично от нуля. В этом случае напряженное состояние называется одноосным.

2.2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ПОЧВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Описание деформированного состояния почвенных элементов — один из главных вопросов механики почв.

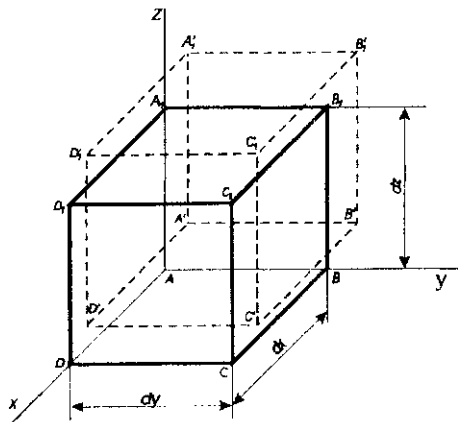


Рис. 2.6

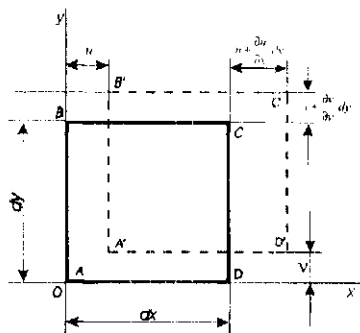


Рис. 2.7

Для исследования деформаций вырежем из тела элементарный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребра которого равны dx, dy, dz (рис.2.6) с началом координат в точке A . После деформирования без искажения углов между ребрами, вершины параллелепипеда обозначим $A' B' C' D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$. Спроецируем первоначальное положение грани $ABCD$ и новое положение этой грани $A' B' C' D'$ на координатную плоскость xAy (рис.2.7). При этом линейные перемещения точки A в направлении осей x и y обозначим соответственно u и v . Линейное перемещение точки C в направлении оси x равно

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

а в направлении оси y

$$v + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

При этом ребро AD , которое имело до деформации длину dx , получит приращение, равное

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx ,$$

а ребро AB длиной dy получит приращение

$$\frac{\partial v}{\partial y} dy .$$

Относительной линейной деформацией в точке по данному направлению называется отношение изменения длины бесконечно малого элемента к его первоначальной длине.

Относительная линейная деформация ϵ_x в направлении оси x равна отношению приращения длины ребра

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx$$

к его первоначальной длине dx :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx / dx = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Аналогичным образом получим относительную линейную деформацию вдоль осей y и z :

$$\epsilon_y = \partial v / \partial y ; \quad \epsilon_z = \partial w / \partial z ,$$

где w — линейное перемещение точки A в направлении оси z .

Рассмотрим искажение прямоугольной грани $ABCD$ в результате угловой деформации (рис. 2.8). Точка D переместится в точку D' , и величина перемещения будет

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx ,$$

а точка B перемещается в точку B' и величина отрезка BB' равна

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy .$$

Угловой деформацией называется величина искажения прямого угла, т.е. $\gamma = \pi/2 - \angle B'AD' = \angle BAB' + \angle DAD'$, где углы BAB' и DAD' измеряются в радианах. В силу малости этих углов можно принять

$$\angle BAB' = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\angle DAD' = \frac{DD'}{AD} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда угловую деформацию в плоскости xAy можно записать

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Угловые деформации в плоскостях xAz и yAz будут:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

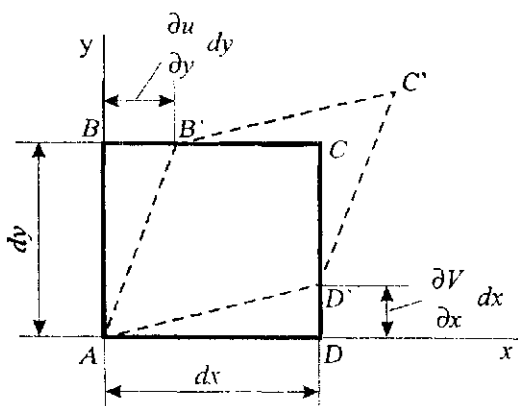


Рис. 2.8

Таким образом можно написать шесть компонент относительных линейных и угловых деформаций:

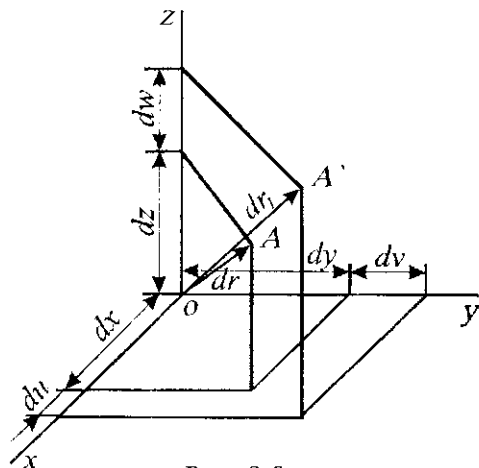


Рис. 2.9

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} ; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} ; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} ; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} ; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} . \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Приведенные выше соотношения называются уравнениями Коши.

Для исследования деформации в точке O в произвольном направлении проведем элементарный вектор OA (рис.2.9), имеющий направляющие косинусы l, m, n , где $l=dx/dr$; $m=dy/dr$; $n=dz/dr$.

Пусть в результате деформации вектор OA изменил свою длину и направление. Точка A переместится в точку A' . При этом длина вектора станет dr_1 . Направляющие косинусы нового вектора будут:

$$l_1 = \frac{dx + du}{dr_1} ; \quad m_1 = \frac{dy + dv}{dr_1} ; \quad n_1 = \frac{dz + dw}{dr_1} .$$

Для направляющих косинусов l, m, n и l_1, m_1, n_1 справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1; \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Проекции полного перемещения точки A на оси x, y, z обозначены du, dv, dw . Их можно записать как полные дифференциалы:

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{u}{x} dx + \frac{u}{y} dy + \frac{u}{z} dz ; \\ dv &= \frac{v}{x} dx + \frac{v}{y} dy + \frac{v}{z} dz ; \\ dw &= \frac{w}{x} dx + \frac{w}{y} dy + \frac{w}{z} dz . \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Второе уравнение выражения (2.33) можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{dx + du}{dr_1} \right)^2 + \left(\frac{dy + dv}{dr_1} \right)^2 + \left(\frac{dz + dw}{dr_1} \right)^2 = 1$$

или

$$\left(\frac{dx + du}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dy + dv}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dz + dw}{dr} \right)^2 = \left(\frac{dr_1}{dr} \right)^2. \quad (2.35)$$

Подставляя формулу (2.34) в (2.35) и пренебрегая квадратами первых производных перемещений и их произведениями по сравнению с линейными и угловыми деформациями, получим

$$\left(\frac{dr_1}{dr} \right)^2 = 1 + 2[\varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} l m + \gamma_{yz} l n + \gamma_{xz} m n]. \quad (2.36)$$

Относительная деформация линейного элемента dr определяется из выражения

$$\varepsilon = (dr_1 - dr) / dr = dr_1 / dr - 1,$$

откуда

$$dr_1 / dr = 1 + \varepsilon, \quad \text{а} \quad (dr_1 / dr)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Так как ε — малая величина, то квадратом ее по сравнению с ε можно пренебречь, поэтому:

$$(dr_1 / dr)^2 = 1 + 2\varepsilon. \quad (2.37)$$

Сравнивая формулы (2.36) и (2.37), получим

$$\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} l m + \gamma_{yz} l n + \gamma_{zx} m n. \quad (2.38)$$

Выражение (2.38) устанавливает зависимость между относительной деформацией ε в направлении, определяемом направляющими косинусами l, m, n и относительными линейными $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и угловыми $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{zy}$ деформациями в системе координат x, y, z :

$$T_{ii} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (2.39)$$

Часто используются тензорные обозначения компонент деформации ε_{ij} .

В этом случае формула Коши (2.32) будет

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где x_i — декартовы координаты;

u_i — составляющие вектора перемещения.

Тогда формулу (2.39) можно переписать в виде

$$T_{\mathcal{D}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.40)$$

Свойства матрицы тензора деформации во многом сходны со свойствами тензора напряжений. $T_{\mathcal{D}}$ симметрична

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (2.41)$$

Если положение системы координат выбрано таким образом, что все деформации сдвига равны нулю, то в этом случае нормальные деформации ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} называются главными и обозначаются ε_1 , ε_2 , ε_3 соответственно. Направления главных деформаций совпадают с главными направлениями осей координат. В этом случае тензор деформации имеет вид

$$T_{\mathcal{D}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (2.42)$$

где $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

По аналогии с теорией напряженного состояния главные деформации являются действительными корнями кубического уравнения

$$\left| \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij} \right| = 0 \quad (\varepsilon = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}). \quad (2.43)$$

Запишем кубическое уравнение в развернутом виде:

$$\varepsilon^3 - J_1(\varepsilon)\varepsilon^2 + J_2(\varepsilon)\varepsilon - J_3 = 0, \quad (2.44)$$

где $J_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$;

$$J_2(\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1;$$

$$J_3(\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Значения ϵ_i , как главные удлинения, не зависят от выбора осей координат, поэтому величины $J_1(\epsilon)$, $J_2(\epsilon)$, $J_3(\epsilon)$ являются инвариантами тензора деформаций относительно поворота осей координат.

Одной из основных задач при исследовании напряженно-деформированного состояния почвенного элемента является установление функциональной зависимости между σ и ϵ . В зависимости от усилий почва будет деформироваться меньше или больше. Так, если почва характеризуется большой твердостью, то даже большие напряжения вызовут лишь небольшие деформации, тогда как деформация рыхлой почвы значительна и при небольших напряжениях.

Поэтому каждому конкретному состоянию почвы будет соответствовать определенная связь между тензором напряжений и тензором деформаций:

$$T_n = f(T_d) . \quad (2.46)$$

Установить функциональную связь между T_n и T_d помогают модели, которые распространены очень широко. Их используют в математике, механике, агрономии, философии и др. В зависимости от конкретной области применения в это понятие вкладывают различные смысл и содержание. Модели находятся в динамическом развитии. Новые дополняют старые или корректируют их область действия. В механике почв в основном используются математико-механические модели. Учет всех свойств реальных объектов и процессов неорганического и органического мира — предмета механики почв, является задачей исключительно трудной для математико-механического моделирования. Поэтому при разработке моделей надо включать в них только те свойства, которые играют основную роль в исследованном явлении. Кроме того, следует сопоставлять теоретические результаты, полученные на основании выбранной модели, с результатами экспериментов.

Почвы относятся к моделям деформируемых тел, свойства которых могут быть самыми разнообразными. Поэтому необходимо идеализировать и упрощать их, создавая модели, которые описывали бы основные, определяющие свойства. Такими являются модели упругого тела, вязкой жидкости, пластического тела.

3.1. УПРУГОЕ ТЕЛО

В сильно переуплотненных почвах, особенно в подпахотном слое, связь между напряжениями и деформациями можно считать линейной и выразить ее в виде закона Гука. При этом предполагается, что почва однородна, но в общем случае может обладать различными упругими свойствами в разных направлениях. Тело, упругие свойства которого неодинаковы в различных направлениях, называется *анизотропным*. Если же упругие свойства в любых направлениях одинаковы, то такое тело называется *изотропным*.

В анизотропном теле связь между напряжениями и деформациями записывается в виде линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + \dots + a_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots + a_{26}\tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + \dots + a_{36}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= a_{41}\sigma_x + \dots + a_{46}\tau_{xy} \\ \gamma_{zx} &= a_{51}\sigma_x + \dots + a_{56}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + \dots + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Коэффициенты a_{ij} характеризуют податливость упругого тела. Чем они больше, тем больше деформации при одних и тех же напряжениях. Из 36 упругих постоянных a_{ij} независимыми являются только 21. Матрица коэффициентов a_{ij} симметрична относительно главной диагонали $a_{ij} = a_{ji}$.

Тело, обладающее тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии упругих свойств, называют *ортогонально ортотропным* или просто ортотропным. Для ортотропного тела число упругих постоянных снижается до 9.

Уравнения обобщенного закона Гука принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z ; \\ \varepsilon_y &= a_{21} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{23} \sigma_z ; \\ \varepsilon_z &= a_{31} \sigma_x + a_{32} \sigma_y + a_{33} \sigma_z ; \\ \gamma_{yz} &= a_{44} \tau_{yz} ; \gamma_{zx} = a_{55} \tau_{zx} ; \gamma_{xy} = a_{66} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1 ; a_{22} = 1/E_2 ; a_{33} = 1/E_3 ; \\ a_{12} &= a_{21} = -\nu_{21}/E_2 = -\nu_{12}/E_1 ; \\ a_{23} &= a_{32} = -\nu_{32}/E_3 = -\nu_{23}/E_2 ; \\ a_{44} &= 1/G_{23} ; a_{55} = 1/G_{13} ; a_{66} = 1/G_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где E_1, E_2, E_3 — модули упругости в направлении координатных осей x, y, z соответственно;

$\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ — коэффициенты Пуассона. Например, коэффициент ν_{12} характеризует величину поперечной деформации в направлении оси y от напряжений σ_x , а ν_{21} — величину деформаций в направлении оси x от напряжений σ_y .

В силу симметричности $a_{ij} = a_{ji}$ коэффициенты Пуассона и модули упругости E_i, E_j связаны равенствами

$$\nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i ; \quad (3.4)$$

G_{12}, G_{13} обозначают модули сдвига в соответствующих плоскостях.

В случае изотропного тела количество упругих постоянных уменьшается до модуля упругости E (модуль Юнга), модуля сдвига G и коэффициента Пуассона ν . Указанные свойства тела связаны зависимостью

$$G = E/[2(1+\nu)] , \quad (3.5)$$

откуда следует, что независимыми будут только две из трех упругих постоянных.

Для изотропного тела обобщенный закон Гука имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}; \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Введем объемную деформацию Δ как отношение изменения бесконечно малого объема тела ΔdV , вызванного деформацией, к первоначальному объему dV , т.е. $\Delta = \Delta dV / dV$. Пренебрегая бесконечно малыми величинами более высокого порядка, можно получить $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, т.е. выражение первого инварианта тензора деформации.

Суммируя первые три уравнения системы (3.6), имеем

$$\Delta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.7)$$

Если уравнения (3.6) решить относительно нормальных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, то получим иную форму записи (обобщенного) закона Гука. С учетом выражения (3.7) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Delta; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\Delta; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\Delta; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где $\lambda = 2\nu G / (1 - 2\nu)$. Коэффициенты G и λ обычно называют параметрами Лямэ, а уравнения (3.8) - обобщенным законом Гука в форме Лямэ.

В одномерном случае закон Гука имеет совсем простой вид

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (3.9)$$

Графическая интерпретация закона (3.9) показана на рис. 3.1,а.

Тело Гука можно проиллюстрировать с помощью механического элемента упругой пружины (рис.3.1,б) .

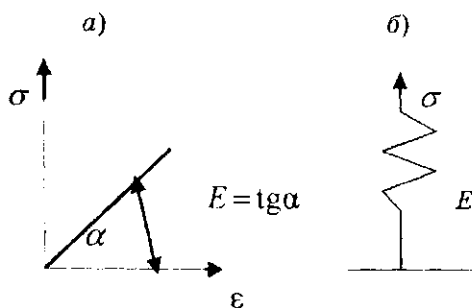


Рис. 3.1

3.2. ПЛАСТИЧНОЕ ТЕЛО

Пластичностью называют свойство тел необратимо изменять, не разрушаясь, свою форму под действием внешних сил. Эксперименты показывают, что пластичность – общее свойство твердых тел. Пластичное состояние твердого тела обычно наступает тогда, когда максимальное касательное напряжение τ_{\max} достигает некоторого определенного значения τ_s , называемого пределом текучести на сдвиг. При этом принимается, что в пластичном состоянии материал несжимаем.

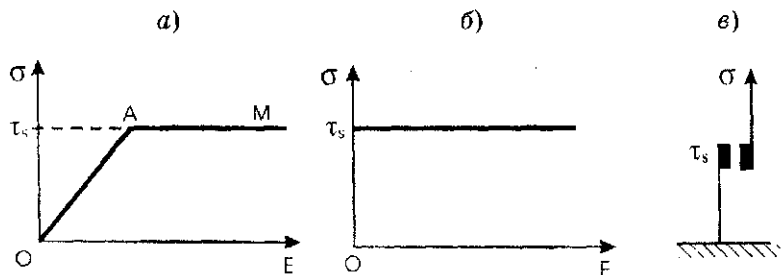


Рис. 3.2

Рассмотрим ряд диаграмм пластического деформирования [6-8].

На рис. 3.2, а изображена зависимость между напряжением и деформацией для упругопластической среды. При напряжениях ниже предела текучести $\sigma < \tau_s$ тело деформируется упруго по закону Гука (отрезок OA), а при $\sigma = \tau_s$ тело деформируется пластически (отрезок AM). Среда, подчиняющаяся такому закону деформирования, называется упругопластическим телом Прандтля.

На рис. 1.3, б приведена диаграмма идеально пластической среды, а на рис. 3.2, в — механический элемент, характеризующий пластические свойства тела.

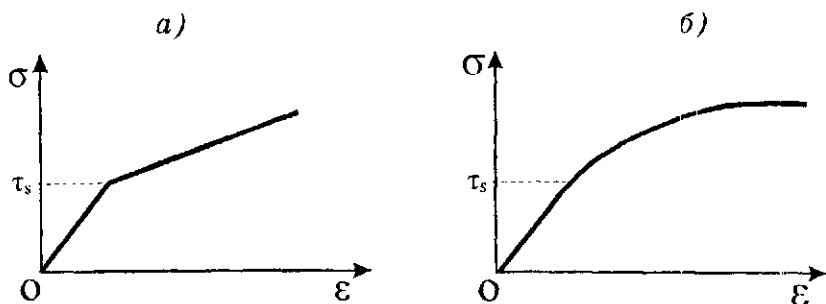


Рис.3.3

На рис.3.3 показаны зависимости $\sigma - \epsilon$ для материалов с линейным (рис.3.3,а) и нелинейным (рис. 3.3,б) упрочнением.

В случае идеально пластического материала (тело Сен-Венана) упругие деформации равны нулю, а при $\sigma = \tau_s$ в нем развиваются неограниченные пластические деформации.

Таким образом, при $\sigma < \tau_s$ имеют место упругие деформации, а при $\sigma \geq \tau_s$ — пластические. При одноосном растяжении (сжатии) граница между упругим и пластическим состоянием определяется напряжением $\sigma = \tau_s$ и деформацией $\epsilon = \epsilon_s$. Значительно труднее определить границу между областями в сложном напряженном состоянии. В теории пластичности большое значение имеют такие понятия, как девиаторы напряжений и деформаций.

Представим тензор напряжения T_n в виде суммы двух тензоров:

$$T_n = T_\sigma + S_\sigma, \quad (3.10)$$

где

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

— шаровой тензор;

$$S_\sigma = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_0) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_0) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_0) \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

— девиатор напряжений, который можно представить также в виде (2.29).

Напряжение σ_0 обуславливается всесторонним растяжением (сжатием) и выражается уравнением

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.13)$$

Это напряжение изменяет только объем, но не форму образца.

Напряженное состояние, характеризуемое девиатором напряжений, напротив, не изменяет величины объема, но изменяет форму выделенного из тела элемента.

Опытным путем установлено, что тело может испытывать очень большое равностороннее сжатие и оставаться при этом в упругом состоянии. Из этого следует, что за переход из упругого состояния в пластическое ответствен девиатор напряжений. Инварианты тензора девиаторной части в главных осях запишутся в виде:

$$I_1(S) = (\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_0) + (\sigma_3 - \sigma_0); \quad (3.14)$$

$$I_2(S) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (3.15)$$

Интенсивностью напряжений называют величину, пропорциональную второму инварианту девиатора напряжений $\sigma_i = \sqrt{3I_2(S)}$, т.е.

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.16)$$

Интенсивностью касательных напряжений называют величину, равную корню квадратному из второго инварианта девиатора напряжений:

$$\tau_i = \sqrt{I_2(S)}$$

или

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.17)$$

Связь между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью касательных напряжений τ_i выражается зависимостью

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_i. \quad (3.18)$$

Интенсивность касательных напряжений τ_i с точностью до числового множителя равна касательному напряжению на площадке, равно наклоненной к направлениям главных напряжений (рис. 3.4). Действительно, направление нормали n к этой площадке характеризуется направляющими косинусами

$$\cos(x, n) = \cos(y, n) = \cos(z, n) = 1/\sqrt{3}.$$

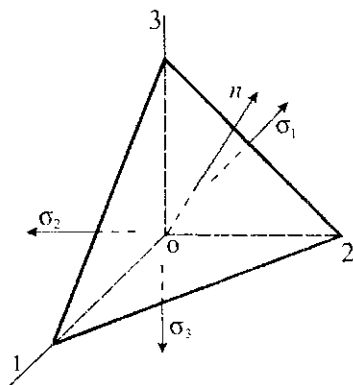


Рис. 3.4

Полное напряжение P_n на этой площадке, называемой октаэдрической, будет равно

$$P_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2(x, n) + \sigma_2^2 \cos^2(y, n) + \sigma_3^2 \cos^2(z, n) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3},$$

а нормальное напряжение

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2(x, n) + \sigma_2 \cos^2(y, n) + \sigma_3 \cos^2(z, n) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Касательное напряжение на октаэдрической площадке найдем из выражения

$$\tau_{окт}^2 = P_n^2 - \sigma_n^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

или

$$\tau_{окт}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

откуда

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.19)$$

Следовательно, $\frac{\tau_i^2}{\tau_{окт}^2} = \frac{3}{2}$ или

$$\tau_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{окт} \quad ; \quad \sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт}. \quad (3.20)$$

Введем понятие интенсивности деформаций. Под интенсивностью деформаций ϵ_i понимают величину, пропорциональную корню квадратному из второго инварианта девиатора:

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2},$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — главные деформации.

Интенсивность деформаций можно выразить и через деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$:

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (3.21)$$

На октаэдрической площадке имеем

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

откуда

$$\varepsilon_i = \gamma_{окт} / \sqrt{2}. \quad (3.22)$$

Из формул (3.20) и (3.22) в случае упругого тела, когда

имеем

$$\begin{aligned} \tau_{окт} &= G \gamma_{окт}, \\ \sigma_i &= 3 G \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Природа пластических деформаций связана с явлением сдвига. Поэтому построение теорий пластичности основывается на сравнении касательных напряжений с предельными напряжениями, обуславливающими явление текучести. Условие пластичности Треска-Сен-Венана определяет переход из упругого состояния в пластическое в окрестности точки в тот момент, когда максимальное касательное напряжение в этой точке достигает некоторого постоянного значения, характерного для данного материала

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_T}{2} \quad (3.24)$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (3.25)$$

Этот критерий пластичности соответствует известному из курса сопротивления материалов условию, вытекающему из теории прочности наибольших касательных напряжений.

Условие пластичности Губера-Мизеса определяет переход из упругого состояния в пластическое в окрестности точки, когда

$$\sigma_i = \sigma_T \quad (3.26)$$

или

$$\sigma_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.27)$$

В этом случае не максимальное касательное напряжение, а октаэдрическое касательное напряжение $\tau_{окт}$ достигает некоторого постоянного для данного материала предельного значения. Критерий пластичности Губера-Мизеса соответствует известному условию энергетической теории прочности.

Отметим, что результаты, получающиеся по этим двум критериям пластичности, достаточно близки. Однако для плоского напряженного состояния экспериментальные результаты лучше согласуются с критерием пластичности Губера-Мизеса. На переход из упругого в пластическое состояние не оказывает влияния величина всестороннего давления (среднее напряжение σ_0). Переход в пластическое состояние зависит от девиатора напряжений, а так как этот процесс не может зависеть от выбора осей координат, то, следовательно, условие пластичности есть некоторая функция от инвариантов девиатора напряжений. В общем случае условие перехода в пластическое состояние можно записать в виде уравнения

$$f[I_2(S), I_3(S)] = 0. \quad (3.28)$$

Выражение (3.28) в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ описывает некоторую поверхность, обычно называемую поверхностью текучести.

В случае критерия пластичности Губера-Мизеса уравнение (3.28) примет вид:

$$f[I_2(S)] = 0 \quad (3.29)$$

или

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (3.30)$$

Полученное уравнение в осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — есть уравнение цилиндра, ось которого равнонаклонена к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис.3.5). Если рассечь цилиндр плоскостью $\sigma_3 = 0$, то получим в сечении эллипс, уравнение которого будет $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2$.

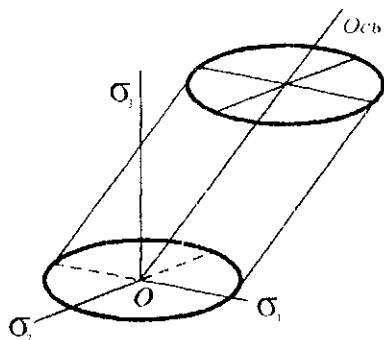


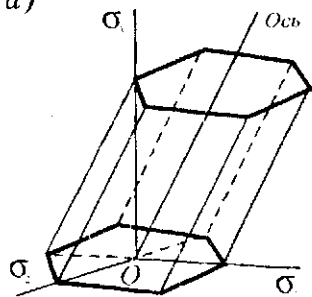
Рис. 3.5

Таким образом, критерию пластичности Губера-Мизеса соответствует поверхность текучести в форме кругового цилиндра, радиус которого в плоскости, перпендикулярной к оси, равен $\sigma_T / \sqrt{2}$

В случае критерия Треска-Сен-Венана, $(\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T)$ в выполнении условий

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_T; \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_T; \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_T$$

а)



б)

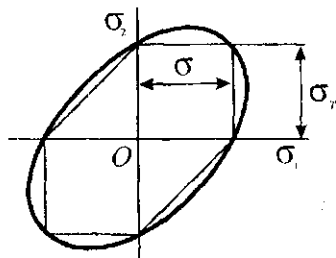


Рис. 3.6

поверхность текучести в осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляется в виде шестигранной призмы с осью, равнонаклоненной к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 3.6,а). Эту призму называют призмой Кулона.

Оси цилиндра Губера-Мизеса и призмы Кулона совпадают, и уравнение этой оси будет $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Призма Кулона оказывается вписанной в цилиндр Губера-Мизеса (рис. 3.6,б).

Для того чтобы воспользоваться условием пластичности Сен-Венана, необходимо заранее знать, какое из главных напряжений является максимальным, а какое — минимальным. В случае применения условия пластичности Мизеса определять главные напряжения вообще не нужно. Используя формулу (3.16), условие $\sigma_1 = \sigma_T$ можно записать в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_T^2. \quad (3.31)$$

Поэтому в решении практических задач условие пластичности Губера-Мизеса более удобно, чем условие Треска-Сен-Венана.

3.3. ВЯЗКОСТЬ И ПОЛЗУЧЕСТЬ

Вязкость почвы трактуется аналогично свойству вязкой жидкости. Известно, что вязкая жидкость характеризуется прямой пропорциональностью между напряжениями и скоростью деформации, которая определяется законом Ньютона. В одномерном случае имеем:

$$\sigma = \mu \dot{\epsilon}, \quad (3.32)$$

где $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$;

t — время;

μ — коэффициент вязкости.

Здесь напряжение зависит не от деформации, а от ее скорости. Модель ньютоновской жидкости представляет собой поршень с отверстиями, который двигается в цилиндре с жидкостью, обладающей постоянной вязкостью (внутримолекулярным трением). При движении поршня жидкость протекает через отверстие и создает сопротивление, которое растет пропорционально скорости движения (рис. 3.7).



Рис. 3.7

В теории пластичности, как и в теории упругости, при определении напряжений и деформаций фактор времени не учитывается. Поэтому напряженное и деформированное состояние тела, находящегося под действием постоянной внешней нагрузки, не изменяется со временем. Однако все реальные тела обладают свойством длительного деформирования (ползучестью). Это означает, что связь между напряжениями и деформациями зависит от скорости приложения и длительности действия нагрузки. Ползучесть — одно из основных свойств реальных тел. При ползучести происходит деформирование как объема, так и формы тела. Следует отметить, что если деформация формы у всех материалов выражена довольно четко, то деформация объемного сжатия у одних материалов существенна (грунты, почвы и иные пористые материалы), а у других пренебрежимо мала (металлы).

Как уже говорилось выше, ползучесть означает изменение во времени напряжений и деформаций. Изменение деформаций во времени называют последствием, а изменение напряжений — релаксацией.

Пусть почвенный образец нагружен за очень короткое время до напряжения σ_0 . При этом он испытывает деформацию ε_0 , которая может быть упругой, а может состоять из упругой и пластической частей. Если приложенная нагрузка постоянна, то деформация образца будет увеличиваться со временем. К концу испытания дополнительная деформация будет равна ε^* , а полная деформация образца $\varepsilon_0 + \varepsilon^*$. После

мгновенного снятия нагрузки упругая деформация исчезает, а деформация последствия остается. Если ε_0 — упругая деформация, то при разгрузке остаточная деформация образца стремится к нулю (рис. 3.8).

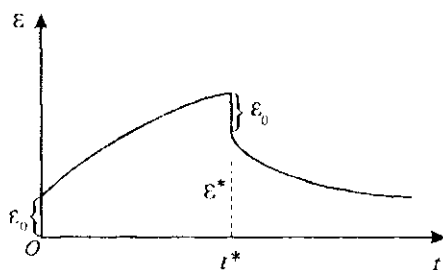


Рис. 3.8

Если начальная деформация ε_0 была упругопластической, то после разгрузки исчезает только упругая ее часть. Остаточная деформация образца будет ε^* .

Свойство ползучести почв характеризуется семействами кривых ползучести (рис. 3.9). Они получаются для данного физико-механического состояния почвы при испытании серии образцов-близнецов под действием различных по величине постоянных напряжений. Кривая 1 соответствует малым нагрузкам, 2 — средним, 3 — большим, при которых почвенный образец может разрушаться.

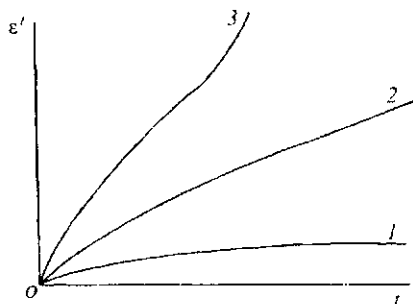


Рис. 3.9

Релаксация напряжений почвенных образцов обусловлена перераспределением во времени упругих ε' и ползучих ε' деформаций.

Релаксация напряжений почвенных образцов обусловлена перераспределением во времени упругих ε'' и ползучих ε' деформаций.

Если полная деформация равна

$$\varepsilon = \varepsilon'' + \varepsilon' = \text{const} , \quad (3.33)$$

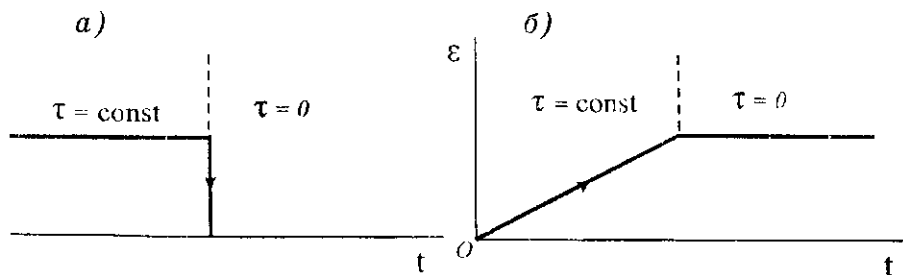
то данное выражение с учетом закона Гука можно переписать в виде [7,8]

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon' = \text{const} .$$

Так как в процессе ползучести ε' растет, то σ должно уменьшаться.

Упругость является характерным свойством твердых тел, вязкость — жидких. Тела, обладающие обоими этими свойствами, называют упруговязкими. Если же у тела с течением времени развиваются не только восстанавливающиеся (упругие), но и остаточные (пластические) деформации, то оно называется упруговязкопластичным. На рис. 3.10 показано развитие деформаций во времени для различных тел.

На рис. 3.10,а графически изображена деформация упругого тела, на рис.3.10,б - деформация вязкого тела. После разгрузки деформация не восстанавливается. Деформация упруговязкого тела показана на рис. 3.10,в. С течением времени скорость деформирования уменьшается, а после разгрузки деформация полностью восстанавливается также во времени. На рис. 3.10,г показана деформация упругопластического тела, которая развивается во времени, но носит незатухающий характер и восстанавливается лишь частично.



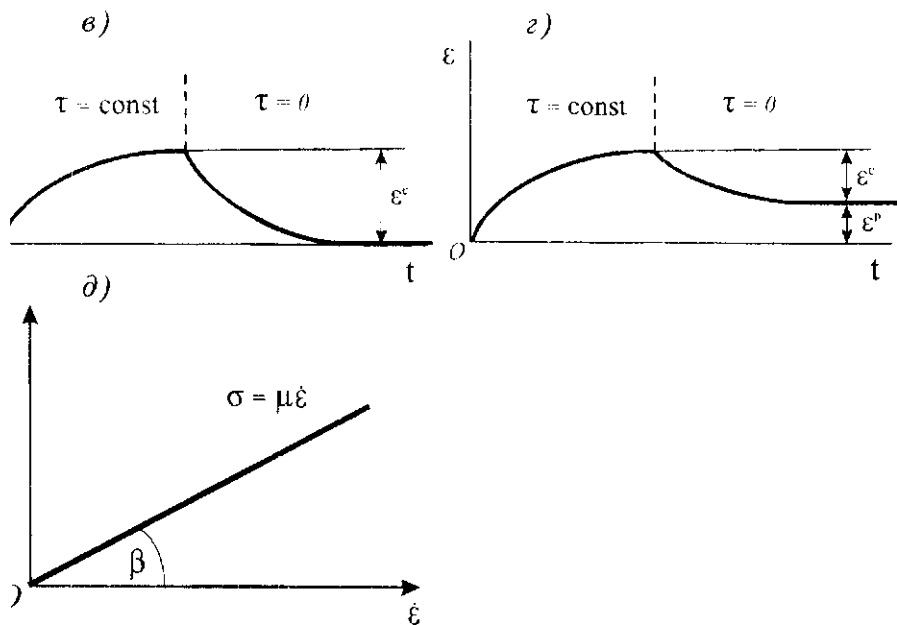


Рис. 3.10

Уравнения состояния реологических сред обычно иллюстрируются при помощи простых механических моделей. В случае одноосного напряженного состояния упругий элемент, подчиняющийся закону Гука ($\sigma = E\epsilon$), изображается в виде пружины (рис. 3.1,б). Вязкий механический элемент, следующий закону вязкости Ньютона ($\sigma = \mu(d\epsilon/dt)$), изображается поршнем,двигающимся в цилиндре с вязкой жидкостью (рис.3.7).

Закон

$$\sigma = \mu \frac{d\epsilon}{dt} = \mu \dot{\epsilon} \quad (3.34)$$

имеет графическую интерпретацию, изображенную на рис. 3.10,в.

Коэффициент вязкости $\mu = \text{tg}\beta$. Вязкость – одно из основных реологических свойств почвы.

Тело при условии $\sigma = \sigma_c$, переходит в текучее состояние и изображается в виде площадки с сухим трением (рис. 3.2,в).

Комбинируя эти простые модели, можно исследовать различные сложные среды. Рассмотрим некоторые из них.

3.4. ТЕЛО КЕЛЬВИНА-ФОЙХТА

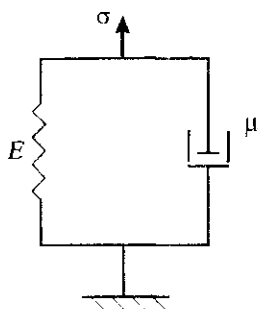


Рис. 3.11

В модели, изображенной на рис. 3.11, пружина и поршень связаны параллельно. Зависимость между напряжением и деформацией имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}. \quad (3.35)$$

Это уравнение можно получить, если учесть, что полное напряжение в среде будет складываться из напряжения, соответствующего упругой деформации, и напряжения, вызываемого вязким сопротивлением. Упруговязкая среда в состоянии покоя ($\dot{\varepsilon} = 0$) ведет себя как упругая. Напряжение в почве растет вместе с увеличением скорости деформации. Если сообщить среде постоянную деформацию, то в среде возникает постоянное напряжение $\sigma = E\varepsilon$. Если же тело грузить постоянным напряжением

$$\sigma = \text{const}, \text{ то при } t = 0, \varepsilon_0 = 0$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\mu}} \right), \quad (3.36)$$

т.е. деформация постепенно нарастает, стремясь к σ_0/E .

Примером тела Кельвина-Фойхта является упругая пористая среда, поры которой заполнены вязкой жидкостью. Эта модель отражает предпосылки, положенные в основу теории фильтрационной консолидации глинистых грунтов Терцаги-Герсеванова.

3.5. ТЕЛО МАКСВЕЛЛА

В этой модели пружина и поршень соединены последовательно (рис. 3.12)

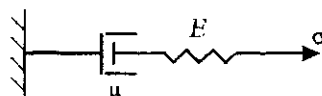


Рис. 3.12

В данном случае складываются скорости деформации, отвечающие одному и тому же напряжению. Закон деформирования записывается в виде

$$\dot{\epsilon} = \frac{I}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (3.37)$$

Если напряжение $\sigma = \text{const}$, то почва деформируется с постоянной скоростью. В случае зафиксированной деформации $\epsilon = \text{const}$ имеем

$$\frac{I}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\mu} = 0, \quad (3.38)$$

откуда

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/T_p} \quad (3.39)$$

где σ_0 – начальное напряжение;

T_p – время (период) релаксации.

Из соотношения (3.39) видно, что напряжение уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону, стремясь к нулю (рис. 3.13).

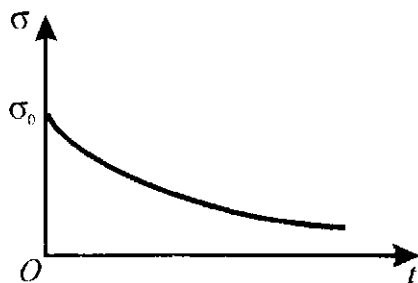


Рис. 3.13

3.6. ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЛА

Вязкопластические свойства тел моделируются составлением схемы вязких и пластических элементов. При параллельном соединении двух элементов — вязкого и пластического (рис. 3.14) закон деформации имеет вид [5-8]

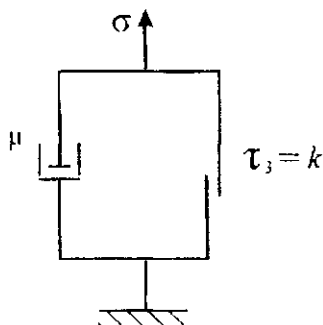


Рис. 3.14

$$\sigma = k + \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{при} \quad \sigma \geq k, \quad (3.40)$$

где k — предел текучести.

Если $\sigma < k$, то тело не деформируется. Рассмотренная среда обычно называется телом Бингама.

При последовательном соединении вязкого и пластического элементов среда ведет себя как ползуче-пластичное тело (рис.3.15).



Рис. 3.15

Если $\sigma < k$, то среда ведет себя как вязкая жидкость, следующая закону вязкости Ньютона $\sigma = \mu d\varepsilon/dt$. Если $\sigma = k$, то среда течет подобно идеально пластическому телу.

3.7. УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЛА

Рассмотрим среду, изображенную на рис. 3.16.

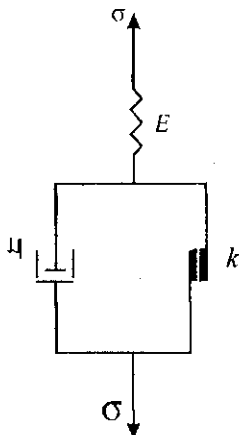


Рис. 3.16

Уравнения состояния среды записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon^e & (\sigma < k); \\ \sigma &= k + \mu\varepsilon^p & (\sigma > k); \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

где ε^e — упругая деформация;

ε^p — пластическая деформация.

Полная деформация

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad (3.42)$$

Если $\sigma < k$, то тело деформируется только упруго, при $\sigma > k$ тело деформируется с постоянной скоростью в случае постоянной пластической вязкости.

На (рис. 3.17) показана реологическая модель тела Шведова.

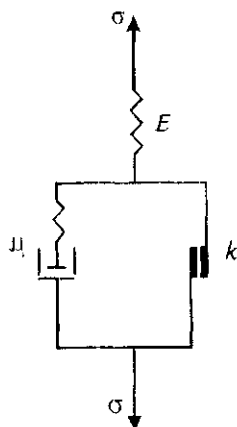


Рис. 3.17

Уравнение состояния будет

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma - k}{\mu} + \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad (3.43)$$

где $(\sigma - k)/\mu$ — скорость вязкого течения;

$\dot{\sigma}/E$ — скорость упругой деформации.

При $\sigma = \text{const}$ уравнение (3.43) переходит в (3.41). Так как (3.41) — частный случай (3.43), то тело Бингама часто называют также телом Бингама-Шведова, закон релаксации которого имеет следующий вид:

$$\sigma = k + (\sigma - k)e^{-t/\tau}. \quad (3.44)$$

Если $k = 0$, то формула (3.43) превращается в (3.37), а (3.44) — в (3.39), т.е. тело Шведова переходит в тело Максвелла.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЧВЕ

4.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ОДНОРОДНЫХ ПОЧВОГРУНТАХ ОТ ГИБКОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

При рассмотрении задач, связанных с процессом взаимодействия сельскохозяйственных деформаторов с почвой, необходимо знать, какие напряжения возникают в зоне контакта и ее окрестности. Информация о распределении напряжений в почвенном массиве как вдоль линии контакта, так и в других точках дает возможность рассчитать параметры агротехнической проходимости движителей, а также определить меру агротехнического повреждения почвы.

В зависимости от цели исследования почву описывают с помощью той или иной математико-механической модели, некоторые из них приведены в данной главе.

Напряженное состояние почвенного массива при действии нагрузки, приложенной к его поверхности, связано со степенью развития деформации (рис. 4.1 (P – давление на штамп, Δ – осадка штампа) [14]).

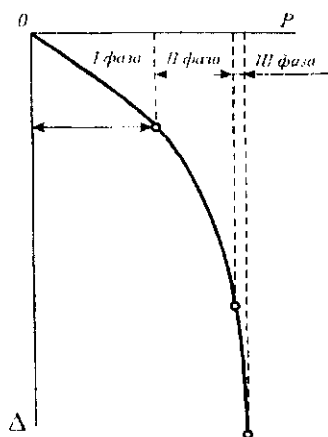


Рис. 4.1

В случае воздействия постепенно возрастающих нагрузок происходит изменение закономерностей распределения напряжений. При относительно малых нагрузках и деформациях, соответствующих I фазе деформации, зависимость $P-\Delta$ прямолинейна и почва практически подчиняется закону Гука. Напряженное состояние близко к рассматриваемому в теории упругости. В этом случае среду считают линейно деформируемым телом, а при решении задач используют методы теории упругости. То обстоятельство, что деформации почвы не полностью упруги (т.е. не протекают мгновенно после приложения нагрузки и не восстанавливаются полностью после ее удаления), не принимают во внимание.

Данный подход можно использовать при определении напряженного состояния в подпахотном слое, а также в сильно уплотненном пахотном слое, когда не учитывается нагрузка.

С увеличением нагрузки на почву начинают возникать зоны пластических деформаций, которые постепенно возрастают, распространяются от деформатора в глубь почвы, захватывая все больший объем (II фаза деформаций).

Дальнейшее увеличение давления ведет к росту деформаций, относящихся к III фазе. Здесь напряженное состояние соответствует задаче предельного равновесия теории пластичности.

В механике грунтов [4, 14] для иллюстрации напряженного состояния грунтового массива используют кривые распределения напряжений. Обычно они показывают применение одного из составляющих напряжений по какому либо направлению или же геометрические места точек, в которых эти напряжения имеют одинаковую величину.

На рис. 4.2 приведены кривые распределения, когда на грунтовый массив действует гибкая бесконечная полоса.

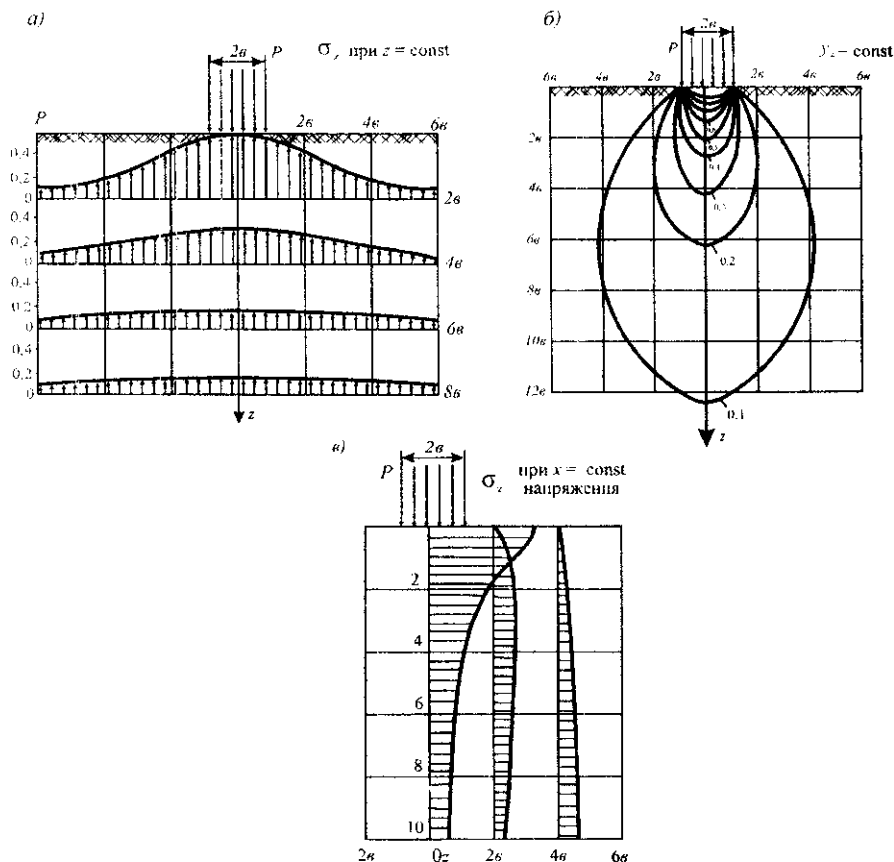


Рис. 4.2

На рис. 4.2,а показано распределение нормальных напряжений по горизонтальному сечению σ_z (при $z = \text{const}$). На рис.4.2,б приведены кривые равных вертикальных нормальных напряжений $\sigma_z = \text{const}$. Кривые, изображенные на рис.4.2,в, показывают распределение вертикальных напряжений по глубине при постоянном расстоянии от оси действия нагрузки σ_z (при $x = \text{const}$). На рис.4.3,а кривые соответствуют равным касательным напряжениям ($\tau_{\text{max}} = \text{const}$), на рис. 4.3,б — кривые равных максимальных вертикальных напряжений, на рис. 4.3,в — кривые равных горизонтальных нормальных напряжений.

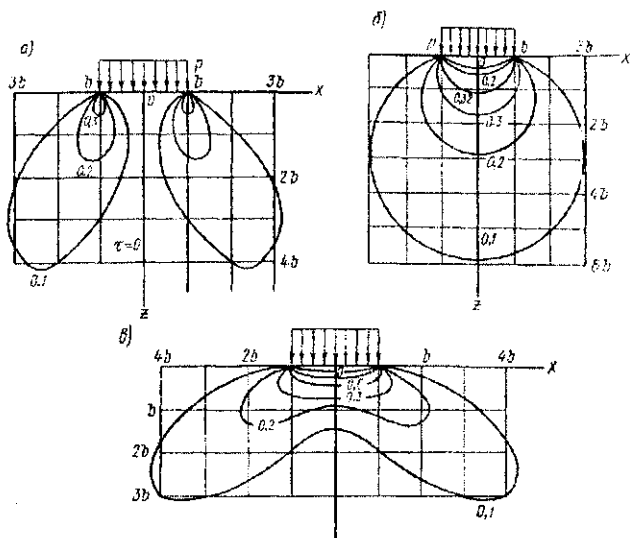


Рис. 4.3

4.2. МЕТОД БУССИНЕСКА

Рассмотрим задачу о распределении напряжений от сосредоточенной силы P , приложенной к бесконечно однородному линейно деформируемому массиву, ограниченному сверху плоскостью (упругоизотропному полупространству (рис.4.4)). Эта схема в первом приближении может отражать реальное воздействие сельскохозяйственной техники на почву [4].

Задача была впервые поставлена и решена Ж. Буссинеском.

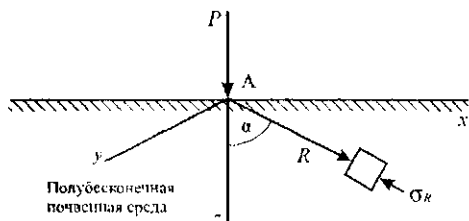


Рис. 4.4

Радиальное нормальное напряжение σ_R (т. е. напряжение на площадке, перпендикулярной радиусу-вектору R , исходящему из точки приложения сосредоточенной силы) в окончательном виде будет [2]

$$\sigma_R = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi R^2} \cos \alpha, \quad (4.1)$$

где α - угол, составляемый радиусом-вектором R с вертикалью, проходящей через точку A приложения силы ($R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Из формулы (4.1) могут быть получены выражения для напряжений по площадкам, нормальным к осям координат $Oxyz$. Нормальные напряжения вдоль оси z

$$\sigma_z = \frac{3}{2} \frac{P z^3}{\pi R^5} \frac{3P \cos^3 \alpha}{2\pi R^2} = \frac{3}{2} \frac{P z^3}{\pi R^5}. \quad (4.2)$$

Горизонтальные, нормальные напряжения по оси x

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x^2 z}{R^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right]. \quad (4.3)$$

Наконец, касательные напряжения

$$\tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi} \frac{x z^2}{R^5}; \quad (4.4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\nu}{3} \frac{(2R+z)xy}{(R+z)^2 R^3} \right]. \quad (4.5)$$

Чтобы получить выражения для σ_y и τ_{xy} , нужно заменить в формулах (4.3) и (4.4) x на y .

В уравнениях (4.2) и (4.5) свойства почвы учитываются только через коэффициент Пуассона ν , а нормальные вертикальные напряжения σ_z вообще не зависят от свойств почвы. Поэтому от одной и той же нагрузки в разных почвах однородного сложения напряжения будут одинаковы.

В формуле (4.2) заменим $\cos\alpha$ на z/R и учитывая, что $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, получим

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi z^2} \frac{1}{[1+(r/z)^2]^{5/2}} = \frac{kP}{z^2}, \quad (4.6)$$

где

$$k = \frac{3P}{2\pi} \frac{1}{[1+(r/z)^2]^{5/2}}; r^2 = x^2 + y^2.$$

Некоторые значения безразмерного множителя k , зависящего от отношения r/z , приведены в таблице.

r/z	k	r/z	k	r/z	k	r/z	k
0,00	0,4775	0,70	0,1762	1,70	0,0160	2,60	0,0029
0,05	0,4746	0,80	0,1386	1,80	0,0129	2,70	0,0024
0,10	0,4657	0,90	0,1083	1,90	0,0105	2,80	0,0021
0,16	0,4482	1,00	0,0844	2,00	0,0085	3,10	0,0013
0,20	0,4329	1,10	0,0658	2,10	0,0070	3,30	0,0009
0,30	0,3849	1,20	0,0513	2,20	0,0058	3,50	0,0007
0,40	0,3294	1,40	0,0317	2,30	0,0048	4,90	0,001
0,50	0,2733	1,50	0,0251	2,40	0,0040		
0,60	0,2214	1,60	0,0200	2,50	0,0034		

Следует отметить, что выражения (4.1) – (4.6) справедливы только для точек, находящихся на некотором удалении от точки приложения силы, так как при малых R напряжения получаются очень большими, что противоречит физическому смыслу.

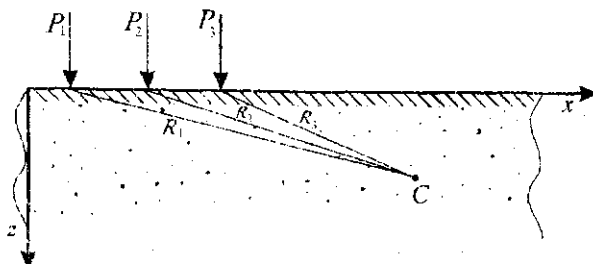


Рис. 4.5

Если к поверхности почвенного массива приложено несколько сосредоточенных сил, например, три: P_1 , P_2 , P_3 (рис.4.5), то сжимающее напряжение в точке C будет

$$\sigma_z = k_1 \frac{P_1}{z^2} + k_2 \frac{P_2}{z^2} + k_3 \frac{P_3}{z^2}, \quad (4.7)$$

где коэффициенты k_1 , k_2 , k_3 определяют из приведенной таблицы в зависимости от соответствующих соотношений r_i/z .

Рассмотренная задача Буссинеска может быть использована при определении напряжений от давления сельскохозяйственных деформаторов в подпахотном слое. Однако рассмотрение точечного контакта между почвой и деформатором может быть выбрано в ограниченных случаях, так как на практике нагрузка от сельскохозяйственной техники передается на почву через опорные поверхности (колеса, гусеницы), распределяющие ее на некоторую площадь.

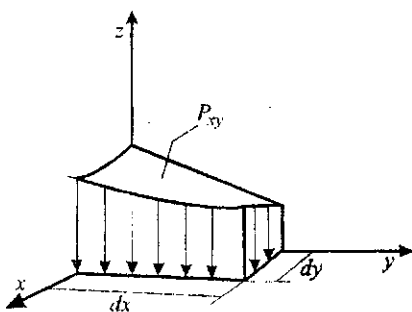


Рис. 4.6

Определим напряжение в полупространстве. Пусть некоторая нагрузка интенсивностью P_{xy} действует на часть поверхности F полупространства, ограниченной замкнутой кривой.

Предположим также, что интенсивность изменяется по закону $P_{xy} = f(x, y)$. Очевидно, что давление на элементарной площадке $dF = dx dy$ (рис.4.6) будет равно

$$P_{xy} dx dy \quad \text{или} \quad f(x, y) dx dy.$$

Тогда из формулы (4.2) следует

$$d\sigma_z = \frac{3z^3}{2\pi R^5} f(x, y) dF, \quad (4.8)$$

где R — расстояние от точки A до элементарной площадки dF .

Полное нормальное вертикальное напряжение

$$\sigma_z = \frac{3z^3}{2\pi} \iint_f \frac{f(x, y)}{R^5} dx dy. \quad (4.9)$$

Рассмотрим распределение напряжений в плоскости, причем плоскость выбирается таким образом, чтобы характер воздействия движителя на почву отражал наиболее характерные особенности.

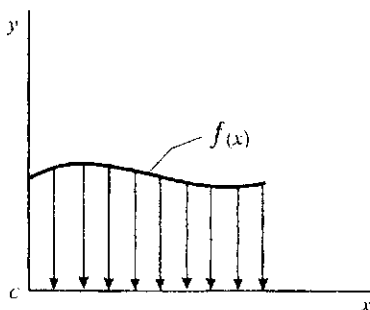


Рис. 4.7

Если известен закон распределения $P=f(x)$ давления движителя на почву в плоскости xu (рис. 4.7), то распределенную силу можно заменить сосредоточенной:

$$dP = f(x) dx. \quad (4.10)$$

Подставив в уравнения (4.1) и (4.2) dP вместо P , получим напряжения $d\sigma_{\mu}$ и $d\sigma_z$ от элементарной сосредоточенной силы. Затем, после преобразования будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2}{\pi} \int_{\beta_2}^{\beta_1} f(x) \cos^2 \beta \, d\beta; \\ \sigma_x &= \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_2}^{\beta_1} f(x) \sin^2 \beta \, d\beta; \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_2}^{\beta_1} f(x) \sin^2 \beta \cos^2 \beta \, d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Анализ формул (4.11) показывает, что величина σ_z уменьшается с глубиной. На величину напряжений влияет не только среднее удельное давление движителя на почву, но и суммарный вес, приходящийся на движитель.

4.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЧВЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ МЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Объемная масса почвы в пахотном и, в меньшей степени, в подпахотном слое изменяется в течение года. Это связано не только с механическим воздействием на почву, но и с климатическими условиями. При осенней вспашке происходит значительное взрыхление почвы до 7 с лишним сантиметров (рис. 1.2), через месяц в результате уплотнения — лишь 4 см, а весной — 3,5 см. Осеннее взрыхление почвы почти на нет сводится при весенней подготовке семенного ложа. Из графика следует, что осадки уплотняют почву, а морозы могут быть причиной некоторого увеличения порозности [2].

Очевидно, что в течение года меняются и напряжения в точках почвенного массива, так как изменяется вес почвы. Приведем формулы распределения напряжений от собственного веса почвы. При отсутствии бокового расширения имеем [4]

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \int_0^z \gamma(z) dz; \quad \sigma_x = \sigma_y = \varepsilon \sigma_z; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \nu / (1 - \nu_0)$ — коэффициент бокового давления почвы в состоянии покоя;

$\gamma(z)$ — удельный вес почвы.

Приведенные выше выражения справедливы только для случая горизонтальной поверхности почвы. Если рассматривать неровную поверхность почвы, то σ_x и σ_y будут изменяться в зависимости от рельефа местности. На рис. 4.8 показаны эпюры напряжений для различных случаев: *a* — в однородном грунте; *b* — при наличии (на глубине h_1) уровня грунтовых вод; *в* — при наличии под грунтовыми водами (на глубине $h_1 + h_2$) водонепроницаемой породы.

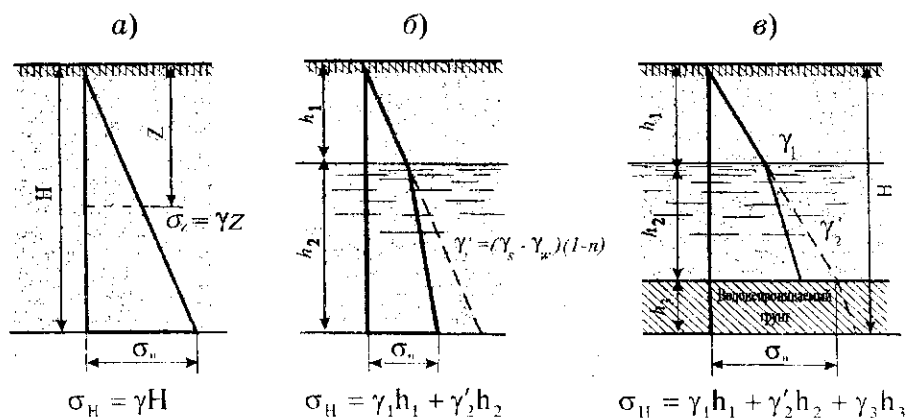


Рис. 4.8

При постоянном удельном весе напряжения

$$\sigma_z = \gamma z.$$

Рассмотрим другие методы вычисления напряжений, которые используются в задачах механики почв.

4.4. ФОРМУЛА ФРЕЛИХА

Опытами установлено, что твердость почвы существенно влияет на распределение напряжений. Твердость почвы можно учесть формулой Фрелиха [2], видоизменив формулу Буссинеска (4.1):

$$\sigma_R = \frac{\lambda P}{2\pi R^2} \cos^{(\lambda-2)} \alpha. \quad (4.12)$$

Выражение (4.12) в проекции на оси x и y запишется в виде трех уравнений:

$$\sigma_z = \frac{\lambda P}{2\pi z^2} \cos^\lambda \alpha;$$

$$\sigma_x = \frac{\lambda P}{2\pi z^2} \cos^{\lambda-2} \alpha \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_{xz} = \frac{\lambda P}{2\pi z^2} \cos^{\lambda-1} \alpha \sin \alpha,$$

где λ — коэффициент концентрации, который возрастает у более мягких почв. Так, для твердой почвы $\lambda=3$, средней твердости — $\lambda=4$, мягкой — $\lambda=5$.

На рис. 4.9 показаны изобары-кривые постоянного напряжения для указанных видов почв. Очевидно, что для вспаханных почв ($\lambda=5$) напряжения концентрируются под местом приложения нагрузки, проникая в почву на большую глубину.

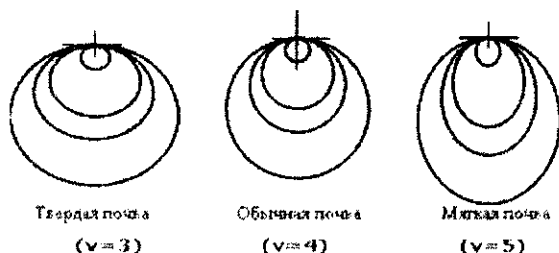


Рис. 4.9

4.5. МЕТОД КРУГА

Приближенно контактное пятно при взаимодействии колеса с почвой можно принять в виде круга, к которому прикладывается равномерно распределенная нормальная нагрузка. Площадь круга берется равной площади пятна контакта, а

интенсивность напряжений на круге — равным среднему нормальному напряжению на поверхности контакта почвы и колеса (рис.4.10).

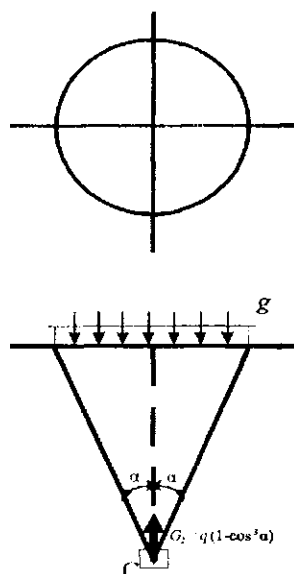


Рис. 4.10

Рассмотрим небольшую горизонтальную плоскость ниже центра круга. Введем угол α , который характеризует глубину расположения рассматриваемой плоскости. Если $\alpha = 90^\circ$, то плоскость лежит на поверхности контакта, при $\alpha = 0$ плоскость находится глубоко в почве. Согласно [2], напряжение

$$\sigma_z = q(1 - \cos^3 \alpha). \quad (4.13)$$

При $\alpha = 90^\circ$ $\sigma_z = q$, при $\alpha = 0$ $\sigma_z = 0$. Формуле (4.13) можно придать иной вид, если учитывать твердость почвы:

$$\sigma_z = q(1 - \cos^\lambda \alpha), \quad (4.14)$$

где λ — коэффициент концентрации, имеющий те же значения, что и в формуле (4.12).

4.6. МЕТОД ПОЛОСНОЙ НАГРУЗКИ

Пусть бесконечная полоса нагружена равномерно распределенной P (рис.4.11).

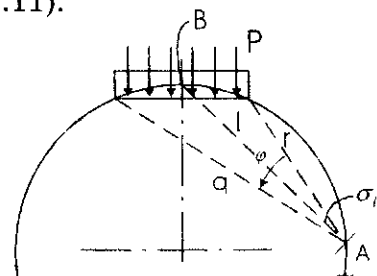


Рис. 4.11

Вычислим напряжение в точке A следующим образом: 1) проводим окружность через точку A и линию раздела почва - пластина (полоса); 2) проводим ось z перпендикулярную полосе через ее середину, таким образом находим точку B на окружности. Соединим точки A и B отрезком прямой l ; 3) проводя прямые g и r через точку A и линию раздела почва - пластина, определяем угол j , образованный g и r .

Величина первого основного напряжения в точке A определяется по формуле

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi}(\varphi + \sin \varphi). \quad (4.15)$$

Напряжение σ_1 направлено вдоль прямой l . Формула (4.15) устанавливает, что на глубине, равной ширине полосы действия нагрузки, напряжение под центром нагрузки составляет примерно половину напряжения на поверхности.

4.7. МЕТОД СУММИРОВАНИЯ ЗЕНЕ

Пусть известны форма и величина поверхности контакта, а также распределение напряжений в области контакта. Разобьем поверхность контакта на составляющие элементы h (рис.4.12).

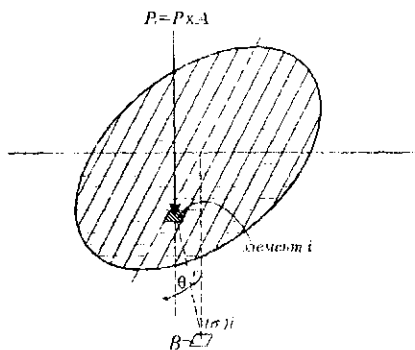


Рис. 4.12

Пусть на элемент i площадью A действует усилие P . Проведем горизонтальную плоскость через точку B , которая находится под центром колеса. Нормальное вертикальное напряжение находят по формуле [2]

$$(\sigma_z)_i = \frac{\lambda P}{2\pi r_z} \cos^3 \theta. \quad (4.16)$$

Суммарное напряжение в точке B будет

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^n (\sigma_z)_i. \quad (4.17)$$

Предложенные выше методы определения напряжений в точках почвенного массива могут быть использованы как в случае однородных почв, так и неоднородных. Неоднородность почвы учитывалась за счет введения коэффициента концентрации. Следует отметить, что для строгого соблюдения критерия теории упругости — условия неразрывности деформации — коэффициент концентрации связан с коэффициентом Пуассона соотношением

$$\lambda = a + 3 = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad a = \frac{1}{\nu} - 2. \quad (4.18)$$

Значения $a = 0$ и $\lambda = 3$ соответствуют упругоизотропному полупространству.

Если $\lambda = 6$, то это соответствует напряжениям в зоне пластических деформаций в малосвязанных почвах в непосред-

ственной близости от загруженной площадки при малых площадях передачи нагрузки. В зоне пластических деформаций почва по своим физико-механическим свойствам будет отличаться от почвы, расположенной глубже.

4.8. МОДУЛЬ ДЕФОРМАЦИИ

В §3.1 была введена величина, характеризующая упругие свойства тела — модуль упругости. Однако часто как в механике грунтов, так и в механике почв используют величину, определяемую отношением сжимающего напряжения к вызываемой им относительной деформации, называемую *модулем деформации*.

Если полная величина упругого и остаточного вертикального сжатия кубика почвы со стороной h , расположенного на некоторой глубине в толщине почвы, равна ε , то модуль деформации этой почвы

$$E = \frac{h}{\varepsilon} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] . \quad (4.19)$$

Если учитывается только восстанавливающаяся часть деформации ε'' , то величина ε есть просто модуль упругости. Модуль деформации почвы комплексно отражает и упругие, и пластические деформации не разделяя их. Он характеризует только возрастание давления на почву и не отражает свойство разгрузки.

Модуль деформации, как и модуль упругости, зависит от влажности почвы, степени ее уплотнения и может быть принят постоянным лишь в узком интервале напряжений или относительных деформаций.

Модули деформаций и упругости почв можно определить по результатам компрессионных испытаний почв и путем вдавливания в почву жестких штампов круглой и квадратной форм.

В механике грунтов при расчетах модуля деформации используют формулу проф. Б.И. Когана. На глубине H имеем

$$E_z = E_0 e^{-\delta \cdot z} , \quad (4.20)$$

где E_0 — модуль деформации непосредственно под нагрузкой;
 z — координата рассматриваемой точки;
 δ — коэффициент, характеризующий интенсивность изменения модуля.

На основе этой формулы приводятся таблицы для расчета автодорожных технологий.

4.9. НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К УСТАНОВЛЕНИЮ ЗАКОНОМЕРНОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОЧВ СЖАТИЮ

Рассмотрим некоторые подходы к распределению напряжений в почве, основанные на установлении связей между напряжениями и деформациями. Как было сказано выше, у почв, особенно пластичных, прямой пропорциональности между нагрузкой и деформацией не существует. Модуль деформации таких сред является переменной величиной, в значительной мере зависящей от нагрузки, структуры и влажности. В этом случае фактической зависимости больше соответствует степенная функция

$$\sigma = E\varepsilon^\gamma, \quad (4.21)$$

где σ — напряжение сжатия;
 E — модуль деформации;
 ε — относительная деформация;
 γ — безразмерный коэффициент.

Более общая зависимость между нагрузкой и деформацией почвы основана на так называемой контактной теории прочности грунтов. Согласно этой теории М.И. Троицкая предложила следующие зависимости:

1) при сжатии в замкнутом объеме

$$\sigma = \sigma_c (e^{-\lambda\varepsilon} - 1), \quad (4.22)$$

2) при сдвиге

$$\sigma = \sigma_s (1 - e^{-\lambda\varepsilon}), \quad (4.23)$$

3) при одновременном сжатии и сдвиге

$$\sigma = \sigma_s \frac{\sigma_c (e^{\lambda\varepsilon} - 1)}{\sigma_s + \sigma_c e^{-\lambda\varepsilon}}, \quad (4.24)$$

где σ_c — предел несущей способности почвы;

σ_0 — начальное напряжение, соответствующее начальному уплотнению;

L — относительный коэффициент жесткости (безразмерная величина).

Формулы (4.22) — (4.24) теоретически более обоснованны, чем формула (4.21). Между тем представляет интерес рассмотрение задачи о внедрении штампа в почву с целью более детального изучения процесса сопротивления почв сжатию. Приведем полностью исследование такой задачи, проведенное проф. В.В. Кацыгиным [9].

При осадке штампа площадью S на глубину h почва оказывает сопротивление $Q = PS$.

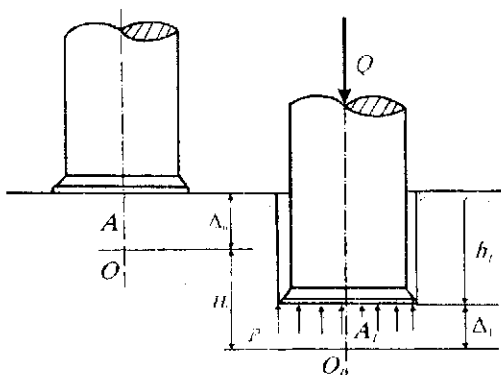


Рис. 4.13

Выберем на продолжении оси штампа (рис.4.13) точку O , находящуюся от поверхности (до приложения нагрузки) на расстоянии $AO = \Delta_0$. Тогда при осадке штампа на глубину h_1 точка O переместится в положение O_1 , причем расстояние от новой точки до поверхности штампа уменьшится: $A_1O_1 = \Delta_1$. Абсолютное перемещение точки O будет равно

$$H_1 = h_1 - \Delta_0 + \Delta_1. \quad (4.25)$$

Можно предположить существование следующего равенства:

$$\frac{dP}{d\Delta_1} H_1 = K h_1 \quad \text{или} \quad \frac{H_1}{\Delta_0 - \Delta_1} = \frac{k}{\frac{dP}{d\Delta_1} - k},$$

где $\Delta_0 - \Delta_1$ — перемещение точки O относительно рабочей поверхности штампа;

k — коэффициент объемного смятия почвы, кг/см³;

$dP/d\Delta_1$ — производная напряжения по деформации.

Если учесть, что $\frac{dp}{d\Delta_1} = \frac{1}{d\Delta_0} E$ (E — модуль сжатия почвы),

и подставить значение H_1 из формулы (4.25), то последнее выражение можно записать в таком виде:

$$\frac{h_1 - \Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0 - \Delta_1} = \frac{k}{\frac{1}{\Delta_0} E - k}. \quad (4.26)$$

Прибавим к правой и левой частям этого равенства по единице и решим его относительно Δ_1 :

$$\Delta_1 = \left| \frac{k}{\frac{1}{\Delta_0} E} - 1 \right| k_1 + \Delta_0.$$

Дифференцируя это выражение, получим:

$$d\Delta_1 = \left| \frac{k}{\frac{1}{\Delta_0} E} - 1 \right| dh_1. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.27) можно переписать следующим образом:

$$d\Delta_1 + dh_1 = \frac{k dh_1}{\frac{1}{\Delta_0} E} = \frac{\Delta_0 k}{E} dh_1.$$

И так как

$$E = \frac{\Delta_0 dP}{d\Delta_1},$$

то после некоторых преобразований получим:

$$\frac{dP}{dh_1} + \frac{dP}{d\Delta_1} = k \quad \text{или} \quad \frac{dP}{dh_1} = k - \frac{E}{\Delta_0}.$$

Учитывая, что последнее выражение справедливо при любом $h_1 = h$ и принимая $\Delta_0 = R$ (где $R = \sqrt{S/\pi}$ — приведенный радиус штампа), имеем

$$\frac{dP}{dh} = k - \frac{1}{R} E. \quad (4.28)$$

Теоретически установлено, что для двухфазной дисперсной среды модуль упругости пропорционален квадрату внешнего давления, т.е. $E = aP^2$ [9]. Подставив значение E в выражение (4.28), получим уравнение с разделяемыми переменными:

$$\frac{dP}{dh} = k - \frac{a}{R} P^2. \quad (4.29)$$

Интегрируя, будем иметь:

$$h = \sqrt{\frac{Rk}{a}} A_3 th \left[\sqrt{\frac{aP}{Rk}} \right]$$

или

$$P = \sqrt{\frac{Rk}{a}} th \left[\sqrt{\frac{ak}{R}} (h - c) \right]. \quad (4.30)$$

Для определения постоянной интегрирования c и коэффициента a проанализируем значение функции в начальных и конечных условиях.

При отсутствии деформации, т.е. когда $h = 0$, напряжение смятия P также равно нулю, а это возможно только при нулевом значении гиперболического тангенса, т.е.

$$\operatorname{th} \left[\sqrt{\frac{ak}{R}} (0-c) \right] = 0 \quad \text{и} \quad c=0.$$

Опыты показывают, что при увеличении деформации почвы штампом напряжение сжатия P стремится к определенному пределу, называемому пределом несущей способности почвы σ_s . Из теории гиперболических функций известно, что если аргумент гиперболического тангенса стремится к бесконечности, то сама функция стремится к единице. Таким образом, в пределе, когда $h \rightarrow \infty$,

$$P_\infty = \sigma_s = \sqrt{\frac{Rk}{a}}.$$

Отсюда коэффициент $a = Rk/\sigma_s$. Подставляя значение c и a в выражение (4.28), получаем формулу для определения сопротивления почвы сжатию:

$$P = \sigma_s \operatorname{th} \frac{k}{P_0} h, \quad (4.31)$$

где σ_s в кг/см² (по Корчунову С.С.);

$$\sigma_s = A_0 + B_0(\pi/S);$$

A_0 — предельное напряжение сжатия почвы;

B_0 — предельное напряжение срезам по периметру p ;

S — площадь штампа.

Полученная формула часто используется на практике. Значения констант σ_s и k для многих почв известны или могут быть определены.

Пропорциональная зависимость между нагрузкой и деформацией является частным случаем формулы (4.31). Это легко показать в тех случаях, когда требуется найти или уточнить значения σ_s и k , что можно сделать графически с помощью диаграммы сжатия либо расчетным путем.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ДЕФОРМАТОРОВ С ПОЧВОЙ

5.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛОВЫХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗОНЕ КОНТАКТА

Для оптимального проектирования сельскохозяйственных машин и орудий с учетом допустимых норм воздействия на почву важную роль в расчетах напряженного и деформированного состояния играют контактные напряжения.

Рассмотрим некоторые подходы, связанные с определением контактных напряжений. Контакт называют согласованным, если поверхности рассматриваемых тел имеют одинаковую или очень близкую форму. Тела с различным по форме профилем будем называть несогласованными. Такие тела первоначально вступают в контакт в точке или вдоль линии. Теория контактного взаимодействия должна определять: 1) величины и распределение вдоль поверхности контакта нормальных и касательных напряжений; 2) площадь области контакта; 3) величины компонент напряжений и деформаций в окрестностях зоны контакта [10].

Обычно поверхности контактирующих тел предполагаются топографически гладкими на микро- и макроуровнях. На микроуровне это означает отсутствие или неучет поверхностных микронеровностей. Такое допущение предполагает полное прилегание поверхностей контакта. На макроуровне профили поверхностей считаются непрерывными в зоне контакта вместе со вторыми производными.

Рассмотрим классическую схему распределения напряжений и перемещений в зоне контакта. Пусть два тела несогласованной формы сжимаются. Если сила сжатия пренебрежимо мала, то эти два тела (рис. 5.1) соприкасаются в точке, которую обычно принимают за начало прямоугольной систе-

мы координат xuz . Ось z выберем таким образом, чтобы она совпадала с общей нормально к поверхностям обоих тел в точке O . Если нижнее тело обозначить

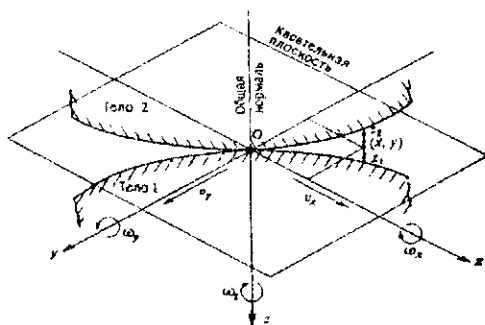


Рис. 5.1

через 1, а верхнее — 2, то в выбранной системе координат недеформированные поверхности обоих тел можно описать уравнениями: $z_1 = f_1(x, y)$; $z_2 = f_2(x, y)$.

Расстояние между точками поверхностей до деформирования выразится соотношением:

$$h = z_1 + z_2 = f(x, y). \quad (5.1)$$

Движение тела в некоторый момент времени определяется кинематическими параметрами, определенными относительно некоторой системы отсчета. Пусть тело 1 имеет линейную скорость V_1 и угловую скорость Ω_1 , а тело 2 — линейную скорость V_2 и угловую скорость Ω_2 . Подвижная система отсчета движется с линейной скоростью точки контакта V_0 и поворачивается с угловой скоростью Ω_0 . Тогда скорости контактирующих тел будут:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \overline{V}_1 &= \overline{V}_1 - \overline{V}_0; \\ \Delta \overline{V}_2 &= \overline{V}_2 - \overline{V}_0; \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= \overline{\Omega}_1 - \overline{\Omega}_0; \\ \overline{\omega}_2 &= \overline{\Omega}_2 - \overline{\Omega}_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Если тела не подвержены взаимопроникновению и их контакт неразрывен, то вдоль общей нормали должно выполняться условие неразрывности

$$V_{z1} = V_{z2} = V_{0z},$$

т. е.

$$\Delta V_{z1} = \Delta V_{z2} = 0. \quad (5.4)$$

Если две поверхности движутся в точке O с относительной скоростью $\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$, то скорость скольжения имеет компоненты

$$\Delta V_x = \Delta V_{x1} - \Delta V_{x2}; \Delta V_y = \Delta V_{y1} - \Delta V_{y2}. \quad (5.5)$$

Качение определяем как вращение рассматриваемых тел вокруг оси, лежащей в касательной плоскости. Относительная угловая скорость имеет компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega_x &= \omega_{x1} - \omega_{x2} = \Omega_{x1} - \Omega_{x2}; \\ \Delta \omega_y &= \omega_{y1} - \omega_{y2} = \Omega_{y1} - \Omega_{y2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Верчение (или спин) определяется как вращение с относительной угловой скоростью вокруг общей нормали:

$$\Delta \omega_z = \omega_{z1} - \omega_{z2} = \Omega_{z1} - \Omega_{z2}. \quad (5.7)$$

Таким образом, процесс взаимодействия контактирующих тел может характеризоваться скольжением, качением, верчением или их комбинацией. Например, можно считать, что колеса сельскохозяйственных агрегатов при прямолинейном движении испытывают качение без скольжения и верчения. При развороте появляется верчение, а при блокировке колеса в процессе торможения оно испытывает скольжение без качения.

Рассмотрим силы и моменты, действующие на площадке контакта. Результирующая сила в точке контакта разлагается на нормальную силу \bar{P} , действующую вдоль общей нормали, и касательную (тангенциальную) силу \bar{Q} , действующую

в касательной плоскости и испытывающую противодействие со стороны сил трения. Если η — коэффициент предельного трения, то должно выполняться условие

$$Q \leq \eta P. \quad (5.8)$$

При скольжении проекции вектора \bar{Q} на оси x и y будут

$$Q_x = -\frac{\Delta V_x}{|\Delta V|} \eta P; \quad Q_y = -\frac{\Delta V_y}{|\Delta V|} \eta P. \quad (5.9)$$

Сжатие деформируемых тел происходит по контактной площадке конечных размеров. В результате становится возможной передача через площадку контакта дополнительно к силам еще и результирующего момента (рис. 5.2).

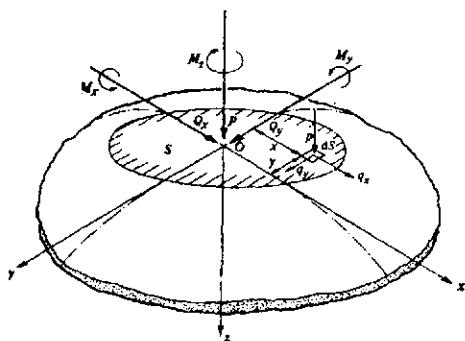


Рис. 5.2

Две составляющие этого момента M_x и M_y называются моментами качения. Составляющая M_z , действующая относительно общей нормали, возникает вследствие трения по площадке контакта и называется моментом верчения. Если в процессе качения колеса по почве происходит и верчение, то энергия, определяющая общее сопротивление качению, состоит из суммы двух энергий, диссипируемых моментами верчения и качения.

Проекции главного момента M_x , M_y и M_z и результирующие силы Q_x , Q_y передаются через площадку контакта посредством поверхностных усилий p и q , распределенных по

области контакта. При этом силовые параметры должны удовлетворять условиям равновесия:

$$\left. \begin{aligned} P &= \int_S p ds; \\ Q_x &= \int_S q_x ds; Q_y = \int_S q_y ds; \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

$$M_x = \int_S p y ds; M_y = - \int_S p x ds; M_z = \int_S (q_y x - q_x y) ds. \quad (5.11)$$

5.2. ДЕЙСТВИЕ СИЛ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Сельскохозяйственные деформаторы почвы имеют различные по форме и размерам области контакта. Точное математическое описание этих областей имеет определенные трудности, поэтому используют приближенные подходы. Часто в практических задачах переуплотненная почва рассматривается как упругое полупространство, нагруженное по некоторой области. Область нагружения может представлять собой узкую прямолинейную полосу. На рис. 5.3 показано сечение упругого полупространства. Поверхность нагружения совпадает с плоскостью xy , направлена параллельно оси y и имеет ширину $a + b$ вдоль оси x . В зоне контакта действуют распределенные нормальные $p(x)$ и касательные $q(x)$ усилия, зависящие только от координаты x .

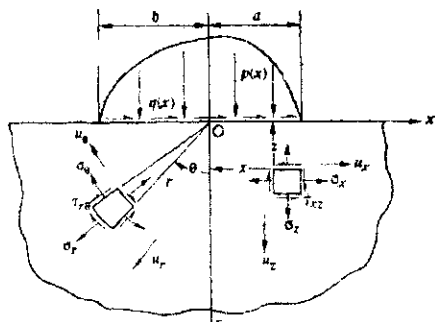


Рис.5.3

Рассмотрим случай плоской деформации, т.е. когда $\varepsilon_y = 0$. Определяем σ_x , σ_z и τ_{xz} во всех точках полупространства и компоненты упругих перемещений u_x и u_z их недеформируемого состояния. Компоненты искомого напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12.)$$

а деформации ε_x , ε_z и ε_{xz} уравнению совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}. \quad (5.13.)$$

Соотношения Коши имеют вид (связь между деформациями и перемещениями):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (5.14.)$$

При плоской деформации

$$\varepsilon_y = 0; \quad \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)$$

и закон Гука можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_z \right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2)\sigma_z - \nu(1+\nu)\sigma_x \right]; \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Введем функцию $\varphi(x, z)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (5.16)$$

и гармоническому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (5.17)$$

Тогда через функцию $\varphi(x, z)$ уравнения равновесия (5.12), совместности (5.13) и закон Гука (5.15) будут выполнены. Функцию $\varphi(x, z)$ называют *функцией напряжений*.

В полярной системе координат (r, θ) функция напряжений $\varphi(r, \theta)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (5.18)$$

Причем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ r_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Связь между перемещениями и деформациями будет

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} - \frac{u_r}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Закон Гука будет сохранять вид (5.15), только x и z заменяются r и θ .

Приведенные уравнения должны удовлетворять граничным условиям. Для полупространства на границе $z=0$ (рис. 5.3) вне участка нагружения поверхность свободна от напряжений, поэтому

$$\sigma_z = \tau_{xz} = 0, \quad \text{для } x < -b; \quad x > a. \quad (5.21)$$

На участке нагружения

$$\sigma_z = -p(x), \quad \tau_{xz} = -q(x). \quad (5.22)$$

Пусть на полупространство действует сосредоточенная сила, интенсивность которой в расчете на единицу длины, измеренной вдоль оси y , равна P (рис. 5.4). Под силой P можно понимать вдавливание в твердую почву зуба, плуга или других элементов сельскохозяйственных орудий.

В качестве функции напряжений выберем

$$\varphi(r, \theta) = Cr \theta \sin \theta. \quad (5.23)$$

где $C = \text{const}$.

Исходя из соотношений (5.19) имеем:

$$\sigma_r = 2C \cos \theta / r; \quad \sigma_\theta = \tau_{\theta r} = 0. \quad (5.24)$$

Действие напряжений σ_r в точке M показано на рис. 5.4. Из (5.24) следует: 1) если $\theta = \pi/2$, то $\sigma_r = 0$ (за исключением начала координат); 2) при $r \rightarrow \infty$, т.е., удаляясь от точки приложения силы P , напряжения затухают; 3) с приближением к началу координат ($r \rightarrow 0$) напряжения неограниченно возрастают, что противоречит физическому смыслу.

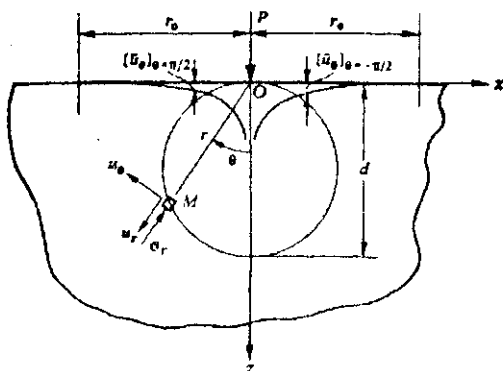


Рис.5.4

Это связано с предположением о действии сосредоточенной силы. Так как точка M выбрана произвольно, то очевидно, что все напряжения, действующие вдоль полуокружности радиусом r , будут равны. А для их суммы и силы P выполняется условие

$$-P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r r \cos \theta d\theta. \quad (5.25)$$

С учетом (5.24) имеем

$$-P = 2C \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = C\pi, \quad (5.26)$$

откуда

$$C = -\frac{P}{\pi}. \quad (5.27)$$

Подставим выражение (5.27) в (5.24) и получим

$$\sigma_\zeta = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta. \quad (5.28)$$

В прямоугольной системе координат напряжения с учетом формул (5.28) и (5.23) примут вид:

$$\sigma_x = \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}; \quad (5.29)$$

$$\sigma_z = \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}; \quad (5.30)$$

$$\tau_{xz} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}. \quad (5.31)$$

Подставив (5.24) и (5.28) в формулу закона Гука (5.15), получим выражения для определения деформаций:

$$\varepsilon_r = -\frac{(1-\nu^2)2P \cos \theta}{\pi r E}; \quad (5.32)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\nu(1+\nu)2P \cos \theta}{\pi r E}; \quad (5.33)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = 0. \quad (5.34)$$

Подставляя формулы (5.32) -- (5.34) в (5.20), получим выражения для определения перемещений. Опуская выкладки, аналогичные приведенным в [10], имеем:

$$u_{r/\theta=\pi/2} = u_{r/\theta=-\pi/2} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} P; \quad (5.35)$$

$$u_{\theta/\theta=\pi/2} = -u_{\theta/\theta=-\pi/2} = \frac{(1-\nu^2)2P}{E} \ln r + A. \quad (5.36)$$

Постоянная A определяется выбором точки поверхности на некотором расстоянии r_0 , в которой задается фиксированное значение нормального перемещения. После определения A уравнение (5.36) примет вид

$$u_{\theta/\theta=\pi/2} = -u_{\theta/\theta=-\pi/2} = -\frac{(1-\nu^2)2P}{\pi E} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (5.37)$$

Компоненты напряжений σ_r и σ_θ являются главными, так как $\sigma_{r\theta} = 0$. Максимальное касательное напряжение равно половине радиального σ_r и действует на площадках, наклоненных под углом 45° к радиальному направлению.

Теперь рассмотрим случай сосредоточенной касательной силы Q , действующей на полупространство (рис. 5.5). Отложив угол θ от линии действия силы, получим радиальные напряжения

$$\sigma_r = -\frac{zQ}{\pi r} \cos \theta. \quad (5.38)$$

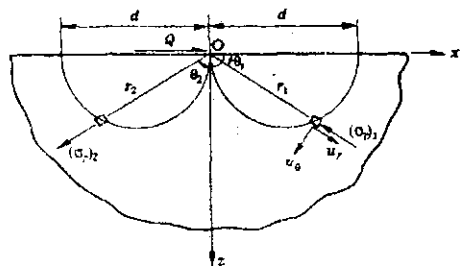


Рис.5.5

Как следует из рис. 5.5, напряжения определяются в двух квадрантах: с положительными значениями x и с отрицательными. В квадранте с положительными значениями x напряжение будет сжимающее, а с отрицательными - растягивающее.

Приведем формулы для определения напряжений в плоскости xz :

$$\sigma_x = -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + z^2)^2}; \quad (5.39)$$

$$\sigma_y = -\frac{2Q}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad (5.40)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}. \quad (5.41)$$

Перемещение точек на поверхности ($z = 0$)

$$-u_{r/\theta=\pi} = u_{r/\theta=0} = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} 2Q \ln r + C; \quad (5.42)$$

$$u_{\theta/\theta=\pi} = u_{\theta/\theta=0} = Q \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E}. \quad (5.43)$$

Постоянную C в формуле (5.42) можно определить, задав фиксированное значение перемещения u_{r0} .

Действие распределенных сил на полупространство

Предположим, что на упругое полупространство действуют распределенные нормальные $p(x)$ и касательные $q(x)$ усилия (рис. 5.6), распределенные на участке $-b \leq x \leq a$.

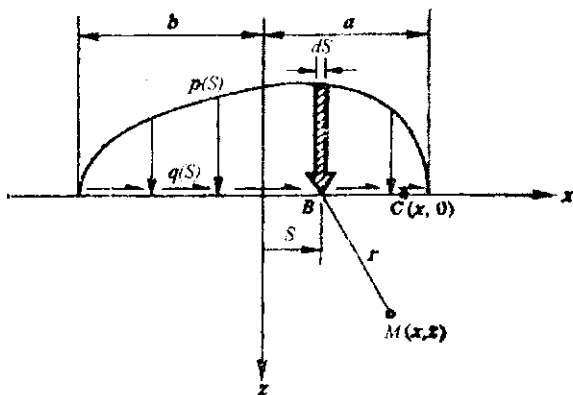


Рис.5.6

Чтобы определить напряжения в некоторой точке $M(x, z)$, рассмотрим усилия, действующие на элемент поверхности шириной dS в точке B оси x . Тогда силы $p dS$ и $q dS$ можно рассматривать как сосредоточенные силы, действующие по нормали и по касательной к поверхности. Согласно [10], напряжения в точке M будут:

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(S)(x-S)^2}{[(x-S)^2 + z^2]^2} dS - \frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(S)(x-S)^3}{[(x-S)^2 + z^2]^2} dS; \quad (5.44)$$

$$\sigma_y = -\frac{2z^2}{\pi} \left[z \int_{-b}^a \frac{p(S)}{[(x-S)^2 + z^2]^2} dS + \int_{-b}^a \frac{q(S)(x-S)}{[(x-S)^2 + z^2]^2} dS \right]; \quad (5.45)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z}{\pi} \left[z \int_{-b}^a \frac{p(S)(x-S)}{[(x-S)^2 + z^2]^2} dS + \int_{-b}^a \frac{q(S)(x-S)^2}{[(x-S)^2 + z^2]^2} dS \right]. \quad (5.46)$$

Для определения напряжений надо знать законы распределения $p(x)$ и $q(x)$. В частности, при равномерном нормальном распределении напряжений, когда $p(x) = \text{const}$, а $q(x) = 0$ уравнения (5.44) – (5.46) переходят в соотношения

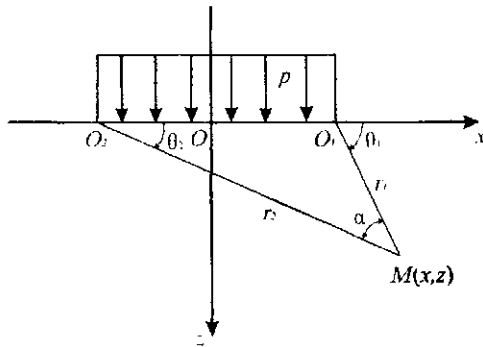


Рис.5.7

$$\sigma_x = -[2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)]; \quad (5.47)$$

$$\sigma_z = -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)]; \quad (5.48)$$

$$\tau_{xz} = \frac{p}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2). \quad (5.49)$$

Перемещения точек на поверхности получаются суммированием перемещений от сосредоточенных сил, которые определялись по формулам, аналогичным (5.35) – (5.37), (5.42) – (5.43).

На границе ($z=0$) для точки M имеем:

$$u_x = -\frac{A_1}{2E} \left\{ \int_{-b}^x p(S) dS - \int_x^a p(S) dS \right\} - \frac{A_2}{\pi E} \int_{-b}^a q(S) \ln|x-S| dS + C_1; \quad (5.50)$$

$$u_z = -\frac{A_2}{\pi E} \int_{-b}^a p(S) \ln|x-S| dS + \frac{A_1}{2E} \left\{ \int_{-b}^x q(S) dS - \int_x^a q(S) dS \right\} + C_2, \quad (5.51)$$

где $A_1 = (1-2\nu)(1+\nu)$; $A_2 = 2(1-\nu^2)$;

C_1 и C_2 – постоянные, определяемые из граничных условий.

Продифференцируем уравнения (5.50) – (5.51) по x , получим [10]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{A_1}{E} p(x) - \frac{A_2}{\pi E} \int_b^a \frac{q(S)}{x-S} dS; \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{A_2}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(S)}{x-S} dS + \frac{A_1}{E} g(x). \quad (5.53)$$

В случае нормального давления, когда $q(x)=0$ на границе $z=0$, имеем

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{A_1}{E} p(x). \quad (5.54)$$

Закон Гука выполняется для всех точек полупространства, в том числе и для точек на поверхности ($z = 0$). Приравнявая правые части первого уравнения (5.15) и (5.54), получим, что на границе $z = 0$

$$\sigma_x = \sigma_z = -p. \quad (5.55)$$

Из формулы (5.55) следует, что обе нормальные компоненты напряжений являются сжимающими.

Равномерно распределенная нагрузка

Пусть на полупространство действует нормальная равномерно распределенная нагрузка p в области $-a \leq x \leq a$ (рис. 5.7).

В этом случае $p = \text{const}$, а $q(S) = 0$.

Из соотношений (5.44) – (5.46) получим:

$$\sigma_x = -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)]; \quad (5.56)$$

$$\sigma_z = -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)]; \quad (5.57)$$

$$\tau_{xz} = \frac{p}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2), \quad (5.58)$$

где $\text{tg } \theta_{1,2} = z/(x \pm a)$.

На круге Мора показаны главные напряжения, которые имеют следующие значения:

$$\sigma_1 = -\frac{p}{\pi} (\alpha - \sin \alpha); \quad (5.59)$$

$$\sigma_2 = -\frac{p}{\pi} (\alpha + \sin \alpha). \quad (5.60)$$

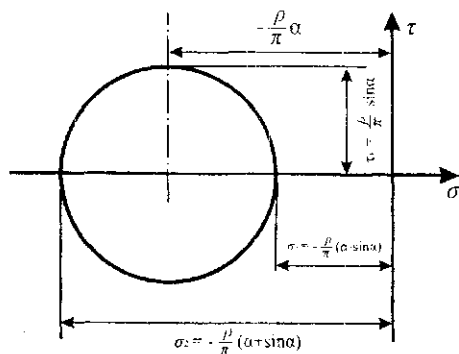


Рис. 5.8

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_1 = (p/\pi)\sin\alpha, \quad (5.61)$$

где $\alpha = \theta_1 - \theta_2$

Из формулы (5.61) следует, что наибольшее значение τ_1 получит при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Перемещения для точек $-a \leq x \leq a$ согласно соотношениям (5.52) – (5.53) будут

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{A_1 p}{E}; \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{A_2}{E\pi} \int_{-a}^a \frac{dS}{x-S}. \quad (5.63)$$

Из формулы (5.62) можно получить

$$u_x = -\frac{A_1 p}{E} x. \quad (5.64)$$

При решении уравнения (5.63) учитывается особенность, когда $S=x$. Аналогично [10] получим

$$u_x = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} p \left[(a+x) \ln \left(\frac{a+x}{a} \right)^2 + (a-x) \ln \left(\frac{a-x}{a} \right)^2 \right] + C. \quad (5.65)$$

Если необходимо найти перемещения вне зоны нагружения ($|x| > a$), получим:

1) при $x < -a$

$$u_x = \frac{A_1}{E} pa ; \quad (5.66)$$

2) при $x > a$

$$-\frac{A_1}{E} pa ; \quad (5.67)$$

3) в направлении оси z

$$u_z = -\frac{A_2}{\pi E} p \left[(x+a) \ln \left(\frac{x+a}{z} \right)^2 - (x-a) \ln \left(\frac{x-a}{a} \right)^2 \right] + C. \quad (5.68)$$

В выражениях (5.64) и (5.67) постоянные определяются в зависимости от выбора нормальных перемещений.

При действии равномерно распределенных касательных усилий на участке $-a \leq x \leq a$ можно записать:

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[4 \ln \frac{d_1}{d_2} - (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \right]; \quad (5.69)$$

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2); \quad (5.70)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{q}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)]; \quad (5.71)$$

где $d_{1,2} = \sqrt{(x \pm a)^2 + z^2}$.

Перемещения в этом случае будут:

$$u_x = -\frac{A_2}{E\pi} p \left[(x+a) \ln \left(\frac{x+a}{a} \right)^2 - (x-a) \ln \ln \left(\frac{x-a}{a} \right)^2 \right] + C; \quad (5.72)$$

$$u_z = \begin{cases} \frac{A_1}{E} pa & x < -a; \\ -\frac{A_1}{E} pa & x > a. \end{cases} \quad (5.73)$$

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ КАТКА ПО ПОЧВЕ

Плодородие почвы во многом зависит от ее структуры, которая заметно разрушается при работе многих сельскохозяйственных машин и орудий, а точнее элементов этих машин и орудий, которые непосредственно контактируют с почвой. Одними из таких элементов-деформаторов являются опорные катки, например, культиваторов. Движение катка по почве в реальных условиях происходит с достаточно заметными зонами скольжения. Рассмотрим скольжение катка на уплотненной почве, когда ее физическое состояние можно описывать в первом приближении упругими свойствами. Каток считаем абсолютно жестким телом. В этом параграфе используются подходы, предложенные в [13].

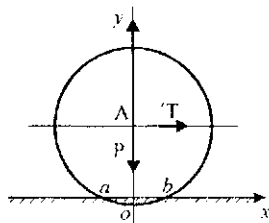


Рис. 5.9

Для случая плоской задачи рис.5.9 закон трения примем

$$\tau_{xy} = \tau_0 - \eta \sigma_y, \quad (5.74)$$

где σ_y и τ_{xy} — нормальные и касательные напряжения на границе упругой полуплоскости ($y = 0$);

τ_0 — коэффициент сцепления.

На ось катка действуют сила тяжести P и сила тяги T . Так как реальное скольжение катка много меньше скорости распространения звука в упругой среде, то в данном случае можно пренебречь динамическими явлениями и рассматривать задачу как квазистатическую.

В системе координат, связанной с катком, на границе тел будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 & \quad -\infty < x < -a; \\ b < x < +\infty; & \\ V = f(x) + \text{const}; & \\ \tau_{xy} = r_0 - \eta \sigma_y & \quad -a < x < b, \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

где V – нормальная компонента смещений на границе ($y = 0$); $f(x)$ – форма контактирующей поверхности, в частности, это может быть не каток, а другой опорный деформатор.

К данной задаче можно применить решение Л.А. Галина [13]. Тогда выражение для перемещения V при $y = 0$ будет:

$$\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} V + \text{const} = \int_a^b (\sigma_y)_{y=0} \ln|t-x| dx - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \Pi \int_a^x (-\tau_{xy})_{y=0} dt; \quad (5.76)$$

где t – точка на линии контакта.

Производную от перемещения запишем в виде [13]

$$\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y=0} = \int_a^b (\sigma_y)_{y=0} \frac{dt}{t-x} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \pi (\tau_{xy})_{y=0}. \quad (5.77)$$

Аналогично [13] введем функцию

$$w_1(z) = u_1 - iV_1 = \int_a^b (\sigma_y)_{y=0} \frac{dx}{x-z}. \quad (5.78)$$

С учетом того, что

$$\tau_{xy} + \eta \sigma_y = 0,$$

и выражения (5.78), уравнение (5.77) можно записать в виде

$$\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y=0} = u_1 + \eta \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} v_1. \quad (5.79)$$

Так как на свободной поверхности $(\sigma_y)_{y=0} = 0$, то мнимая часть $w_1(z)$ будет равна нулю при $y = 0$. На участке вне деформатора ($y = 0$) имеем

$$V_1 = 0; -\infty < x < a; b < x < \infty. \quad (5.80)$$

Вдоль линии контакта

$$u_1 + \eta \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} V_1 = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{df(x)}{dx} + \pi \tau_0 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \quad (5.81)$$

Если форма контактирующей поверхности описывается гладкой функцией вида $f(x) = x^2 / 2R$, то (5.81) примет вид

$$u_1 + \eta \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} v_1 = \pi \left[\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{x}{R} + \tau_0 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right]. \quad (5.82)$$

После некоторых преобразований получим выражение для давления на линии контакта

$$P(x) = \frac{E(x+a)^{1/2-\theta}(b-x)^{1/2+\theta}}{2(1-\nu^2)R \sqrt{1 + \eta^2 \left(\frac{1-2\nu}{2-2\nu} \right)^2}}, \quad (5.83)$$

где

$$\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \quad \left(0 < \theta < \frac{1}{2} \right). \quad (5.84)$$

Неизвестные a и b найдем из выражений:

$$l^2 = (a+b)^2 = \frac{4RP(1-\nu^2)}{\pi E \left(\frac{1}{4} - \theta^2 \right)}; \quad (5.85)$$

$$a-b = 2 \left[e\theta + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \tau_0 R \right]. \quad (5.86)$$

5.4. ЗАДАЧА О КАЧЕНИИ ЖЕСТКИХ И ПНЕВМАТИЧЕСКИХ КОЛЕС ПО ДЕФОРМИРУЕМОМУ ГРУНТУ (ЗАДАЧА А.Ю. ИШЛИНСКОГО)

Закон деформирования почвогрунтов

Рассмотрим плоскую задачу о качении жестких и пневматических колес по деформируемой почве, которая была решена А.Ю. Ишлинским [11].

Известно, что если штамп давит с некоторой силой на грунт, то деформация грунта изменяется с течением времени. По-

гружение штампа в грунт происходит тем более интенсивно, чем больше давление p на грунт. Если давление постоянно и не слишком велико, то осадка грунта x под штампом с течением времени стремится обычно к некоторому пределу. Считаем, что предельные значения осадок пропорциональны соответствующей силе давления, при этом давление p и осадка x связаны между собой дифференциальной зависимостью

$$p = cx + \mu x \frac{dx}{dt}, \quad (5.87)$$

где c — постоянная;

μ — коэффициент, характеризующий вязкость грунта.

Считаем, что указанная дифференциальная зависимость справедлива, пока скорость изменения осадки dx/dt остается положительной, а сама осадка меньше некоторой постоянной δ .

Если $x < \delta$, $p < cx$, то деформация грунта прекращается и зависимость (5.87) заменяется условием постоянства осадки

$$x = x_1 \quad (p < cx, \quad x < \delta), \quad (5.88)$$

где x_1 — осадка, соответствующая обращению dx/dt в нуль (максимальная осадка).

При $p > cx$ вновь справедлива дифференциальная зависимость (5.87) с начальным значением $x = x_1$. Если $x > \delta$, т.е. при достаточно больших деформациях почвы, зависимость (5.87) заменяется следующей:

$$p = K + v \frac{dx}{dt}, \quad K = c\delta, \quad v = \mu\delta. \quad (5.89)$$

Предполагается, что $p > K$. Если в процессе изменения давление p становится меньше K , то деформирование почвы прекращается. Таким образом, $x = \text{const}$ при условии

$$p < K, \quad x > \delta. \quad (5.90)$$

На рис.5.10 представлено распределение областей значений p и x , соответствующих закономерностям (5.87) - (5.90). Рассмотрим деформацию грунта под действием постоянной нагрузки $p = p_0$. Если $p = p_0 < K$, то из дифференциального

уравнения (5.87) получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0 - cx}{\mu x}, \quad (5.91)$$

откуда после интегрирования имеем

$$\frac{ct}{\mu} = \frac{p_0}{c} \ln \frac{p_0}{p_0 - cx} - x + C_1, \quad C_1 = 0. \quad (5.92)$$

Постоянная интегрирования определена из условия $x = 0$ при $t = 0$. При $t \rightarrow \infty$ нетрудно получить из соотношения (5.92) $p_0 = cx$.

Таким образом, для предельных нагрузок справедливо равенство $p = cx$ (закон Герстнера).

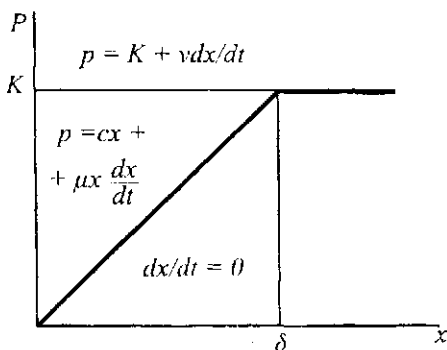


Рис. 5.10

При малых значениях t и x , т.е. в начале процесса, имеем

$$\frac{ct}{\mu} = -\frac{p_0}{c} \ln \left(1 - \frac{cx}{p_0} \right) - x \approx -\frac{p_0}{c} \left(-\frac{cx}{p_0} + \frac{c^2 x^2}{2 p_0^2} \right) - x = \frac{c x^2}{2 p_0}. \quad (5.93)$$

Следовательно,

$$x \approx \sqrt{2 p_0 t / \mu}. \quad (5.94)$$

При малых значениях x должна быть велика скорость изменения осадки dx/dt и, значит, второй член соотношения (5.87) должен быть больше первого. Таким образом, при малых x

$$p \approx \mu x \frac{dx}{dt} \quad (5.95)$$

после интегрирования приходим к формуле (5.94).

Если ввести безразмерные переменные

$$t' = \frac{c}{\mu p_0} t \quad \text{и} \quad x' = \frac{cx}{p_0}, \quad (5.96)$$

то соотношение (5.92) примет вид

$$t' = -\ln(1 - x') - x'. \quad (5.97)$$

График зависимости x' от t' изображен на рис.5.11 при $t' \rightarrow \infty$ и $x' \rightarrow p_0/a$. Если окажется, что $p_0/c > \delta$, то выражения, полученные ранее, будут справедливы только до времени t^* , при котором осадка x достигнет значения δ . Поэтому согласно формулам (5.96) и (5.97)

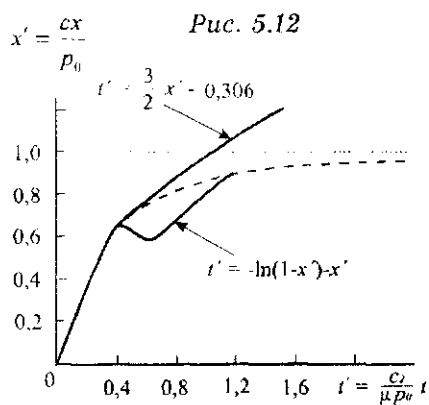
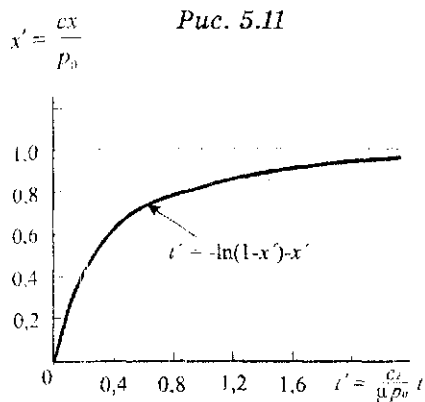
$$t^* = \frac{\mu p_0}{c} \ln \frac{p_0}{p_0 - c\delta} - \frac{\mu}{c} \delta. \quad (5.98)$$

При $x > \delta$ дифференциальное соотношение (5.87) должно быть заменено соотношением (5.89), из которого при $p = p_0 = \text{const}$ следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0 - K}{v} = \text{const} \quad (v = \mu\delta, K = c\delta), \quad (5.99)$$

т.е. после достижения осадкой x характерного значения δ дальнейшее погружение штампа будет происходить равномерно. Таким образом, при $x \leq \delta$ и соответственно $x' \leq c\delta/p_0$ для определения закона изменения осадки во времени можно использовать график (рис.5.11), а в дальнейшем заменить его прямой, касающейся графика в точке с абсциссой $t' = \frac{c}{\mu p_0} t^*$, где t^* определяется по формуле (5.98).

На рис.5.12 изображена подобная кривая для случая, когда уравнение упомянутой прямой имеет вид $t' = \frac{3}{2} x' - 0,306$.



Теория колеобразования. Случай колеса с жестким ободом

Рассмотрим вопрос об образовании и развитии колеи при движении по грунту колеса с жестким ободом. При этом будем предполагать, что обод колеса представляет собой цилиндрическую поверхность и при повторных проходах колесо движется по той же колее.

Рассмотрим колесо радиусом R , нагруженное силой P . Пусть ось перемещается со скоростью v (рис.5.13).

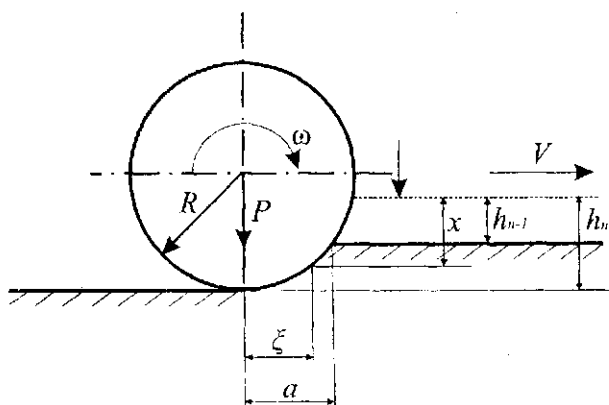


Рис. 5.13

Обозначим h_n глубину колеи после n -го прохода. Так как предполагается, что грунт лишен свойств упругости, то при движении по нему колеса соприкосновение грунта с колесом прекращается в наинизшей точке колеса.

Длина проекции на горизонтальную плоскость области соприкосновения колеса с грунтом (рис. 5.13) определяется с достаточной точностью по формуле

$$a = \sqrt{2R(h_n - h_{n-1})}. \quad (5.100)$$

Обозначим ξ расстояние от какой-либо точки поверхности соприкосновения колеса с грунтом до вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса. Тогда (см. рис. 5.13) осадка грунта, соответствующая этой точке, может быть представлена в виде

$$x = h_n - \xi^2/2R. \quad (5.101)$$

Чтобы найти скорость изменения осадки грунта dx/dt , следует продифференцировать выражение (5.101) и учесть, что расстояние уменьшается со скоростью движения колеса V . Таким образом,

$$\frac{d\xi}{dt} = -V; \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{2\xi}{2R} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\xi}{R} V. \quad (5.102)$$

Как и ранее, будем различать два случая: $x < \delta$ и $x > \delta$. В первом случае согласно соотношению (5.87) получим

$$p = cx + \mu x \frac{dx}{dt} = c \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) + \mu \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) \frac{\xi}{R} V. \quad (5.103)$$

Далее имеем

$$P = \int_0^a p b d\xi,$$

где b — ширина обода колеса.

Подставляя в эту формулу выражение для p из (5.103) и

производя интегрирование, получаем

$$\frac{1}{b}P = c h_n a - c \frac{a^3}{6R} + \mu h_n \frac{v a^2}{2R} - \mu \frac{a^4 v}{8R^2}. \quad (5.104)$$

Из формулы (5.100) следует, что

$$h_n = h_{n-1} + a^2/2R. \quad (5.105)$$

Используя это соотношение, формулу (5.104) можно представить в виде

$$\frac{1}{b}P = c h_{n-1} a + \frac{1}{3}c \frac{a^3}{R} + \mu v \left(h_{n-1} \frac{a^2}{2R} + \frac{a^4}{8R^2} \right). \quad (5.106)$$

Последнее равенство может служить уравнением для определения значения a при заданных величинах c , μ , v , R , а также при заданной глубине колеи h_{n-1} перед очередным проходом колеса. Принимая $h_0 = 0$, можно последовательными решениями уравнения (5.106) проследить глубину колеи в зависимости от числа проходов, а именно:

$$h_1 = a_1^2/2R; h_2 = h_1 + a_2^2/2R; h_3 = h_2 + a_3^2/2R \text{ и т.д.}, \quad (5.107)$$

где a_1, a_2, a_3, \dots — соответствующие длины проекций на горизонтальную плоскость поверхности контакта колеса с грунтом.

Рассмотрим частный случай $\mu = 0$. Тогда уравнение (5.106) примет вид

$$\frac{1}{b}P = c h_{n-1} a + \frac{c a^3}{3R}. \quad (5.108)$$

Подставляя в (5.108) величину a из формулы (5.100) и вводя обозначения

$$\Delta h_n = h_n - h_{n-1}, \quad (5.109)$$

получим

$$\frac{1}{b} P = c \sqrt{2R\Delta} h_n \left(h_{n-1} + \frac{2}{3} \Delta h_n \right). \quad (5.110)$$

Введем безразмерные переменные u_n и δ_n , полагая

$$\Delta h_n = \gamma u_n; \quad (5.111)$$

$$h_{n-1} = \gamma \delta_{n-1}, \quad (5.112)$$

где

$$\gamma = \sqrt[3]{\frac{P^2}{2b^2 c^2 R}}, \quad \delta_n = \delta_{n-1} + u_n. \quad (5.113)$$

В новых переменных уравнение (5.110) примет вид

$$\sqrt{u_n (\delta_{n-1} + \frac{2}{3} u_n)} = 1. \quad (5.114)$$

Полагая $n=1$ и замечая, что $\delta_0 = 0$, имеем

$$\frac{2}{3} u_1^{3/2} = 1, \quad (5.115)$$

откуда

$$u_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = 1,31. \quad (5.116)$$

Следовательно, согласно формулам (5.111), (5.113) и (5.116) получаем

$$h_1 = \Delta h_1 = \gamma u_1 = \sqrt[3]{\frac{9P^2}{8b^2 c^2 R}}. \quad (5.117)$$

Определяем u_2 в соответствии с выражением (5.114):

$$\sqrt{u_2 \left(1,31 + \frac{2}{3} u_2\right)} = 1, \quad (5.118)$$

так как $\delta_1 = u_1 = 1,31$. Корень этого уравнения $u_2 = 0,40$.

Далее находим u_3 :

$$\sqrt{u_3 \left(1,31 + \frac{2}{3} u_3\right)} = 1, \quad (5.119)$$

так как $\delta_2 = u_1 + u_2 = 1,31 + 0,40 = 1,71$. Его корень $u_3 = 0,28$ и т.д.

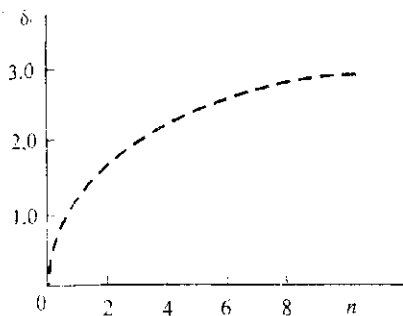


Рис. 5.14

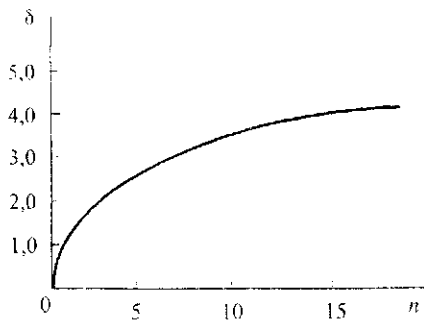


Рис. 5.15

На рис.5.14 приведен график изменения δ_n в зависимости от числа проходов колеса. Согласно формуле (5.112) глубина колеи h_n пропорциональна переменной δ_n .

Чтобы судить о характере изменения глубины колеи в результате большого числа проходов колеса, заметим, что с возрастанием числа проходов n величины δ_{n-1} возрастают, а u_n убывают до нуля. Поэтому согласно формуле (5.114)

$$\delta_{n-1} \sqrt{u_n} = 1, \quad (5.120)$$

откуда

$$u_n = \Delta \delta_n = 1 / \delta_{n-1}^2. \quad (5.121)$$

Выражение (5.121) можно записать в виде уравнения в конечных разностях

$$\frac{\Delta \delta_n}{\Delta n} = \frac{1}{\delta_{n-1}^2}, \quad (5.122)$$

где $\Delta n = 1$.

Этому уравнению можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{1}{\delta^2}. \quad (5.123)$$

Разделяя переменные и производя интегрирование, получим

$$\frac{1}{3} \delta^3 = n + c, \quad (5.124)$$

где c — постоянная интегрирования, которую можно определить, задаваясь каким-либо достаточно большим значением δ_n , определяемым из уравнения (5.114).

Из соотношения (5.124)

$$\delta = \sqrt[3]{3(n+c)}. \quad (5.125)$$

Эта формула позволяет судить о характере изменения глубины колеи при большом числе проходов. На рис.5.15 изображена кривая, соответствующая зависимости (5.125), причем при построении кривой взята начальная точка с абсциссой $n = 5$. При этом c оказалось равным 0,4. На этом же графике воспроизведены точки диаграммы рис.5.14 для $n = 1, 2, 3, 4$.

Заметим, что глубина колеи согласно формуле (5.125) неограниченно возрастает по мере увеличения числа проходов. Такой результат является, разумеется, следствием допущения отсутствия свойств упругости как у грунта, так и у самого колеса. Действительно, согласно выражению (5.100) колея не увеличивается лишь при контакте колеса с грунтом по линии (т.е. при $\alpha = 0$), что соответствует бесконечно большим удельным давлениям, которые в принятой схеме не допускаются.

Рассмотрим второй случай: $x > \delta$. Согласно уравнению (5.89) и учитывая формулу (5.102), имеем

$$\rho = K + \mu \delta \frac{dx}{dt} = K + \mu \delta V \frac{\xi}{R}. \quad (5.126)$$

Подставляя это выражение в (5.104), получаем

$$\frac{1}{\beta} P = \int_0^{\alpha} \pi \delta \xi = K \alpha + \mu \delta \zeta \frac{\alpha^2}{2R}. \quad (5.127)$$

Последнее соотношение определяет α , т.е. длину участка соприкосновения колеса с грунтом. Далее, по формуле (5.105) можно найти изменение глубины колеи после прохода колеса. В отличие от предыдущего случая это изменение не зависит от глубины колеи до очередного прохода колеса. Из (5.127) следует, что наибольшее значение величина α принимает при $V = 0$ или практически при весьма медленном движении колеса.

В этом случае

$$\alpha = P/bK \quad (5.128)$$

и в соответствии с формулой (5.105) согласно теории колеобразования Н. И. Иванова

$$\Delta h = \frac{\alpha^2}{2R} = \frac{P^2}{2b^2 K^2 R}. \quad (5.129)$$

При больших скоростях движения колеса в формуле (5.127) можно опустить первый член и соответственно получить приближенно

$$\frac{1}{b}P = \mu \delta V \Delta h, \quad (5.130)$$

откуда

$$\Delta h = \frac{P}{b\mu\delta V}. \quad (5.131)$$

Таким образом, изменение глубины колеи уменьшается с увеличением скорости, чем можно объяснить лучшую проходимость грунта при повышенных скоростях движения.

В общем случае уравнение (5.127) с учетом формулы (5.100) может быть приведено к виду

$$\frac{1}{b}P = K\sqrt{2R\Delta h} + \mu\delta V\Delta h. \quad (5.132)$$

Если ввести безразмерные переменные $\Delta\eta$ и u , связанные с величинами v и Δh соотношениями

$$\Delta h = \frac{P^2}{2b^2 K^2 R} \Delta\eta; \quad (5.133)$$

$$V = \frac{2bK^2R}{\mu\delta P} u, \quad (5.134)$$

то уравнение (5.132) примет в новых переменных вид

$$\sqrt{\Delta\eta} + u\Delta\eta = 1, \quad (5.135)$$

откуда

$$\Delta\eta = \frac{1 + 2u - \sqrt{1 + 4u}}{2u^2}. \quad (5.136)$$

При $u = 0$ получаем

$$\Delta\eta = 1,$$

следовательно, в соответствии с формулой (5.129)

$$\Delta h = \frac{P^2}{2b^2K^2R}. \quad (5.137)$$

Если значение u велико, то из (5.135) приближенно

$$\Delta\eta = \frac{1}{u}. \quad (5.138)$$

Заменяя в (5.138) $\Delta\eta$ и u их выражениями через Δh и V , без труда получим формулу (5.131).

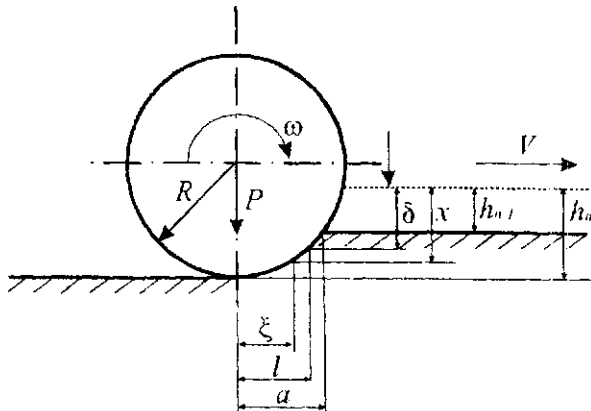


Рис. 5.16

Если глубина колеи до прохода колеса была меньше характерной константы δ , а после прохода оказалась больше, то поверхность соприкосновения колеса следует разделить на две области. В первой области $a > l > \xi$ (рис. 5.16), осадка точек грунта $x < \delta$ и, следовательно, для подсчета давления p надлежит применять формулу (5.103). Для второй области $l > \xi > 0$, напротив, $x > \delta$ и следует пользоваться формулой (5.126).

Длина l границы, разделяющей эти области от вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса, определяется из уравнения

$$\delta = h_n - l^2/2R. \quad (5.139)$$

Соотношение (5.104) можно теперь представить в виде

$$\frac{1}{b}P = \int_0^l pd\xi + \int_l^a pd\xi, \quad (5.140)$$

причем выражение для p в первом интеграле следует брать в соответствии с формулой (5.126), а для второго интеграла — с (5.103). Таким образом,

$$\frac{1}{b}P = \int_0^l \left(K + \mu\delta V \frac{\xi}{R} \right) d\xi + \int_l^a \left[c \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) + \mu V \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) \frac{\xi}{R} \right] d\xi. \quad (5.141)$$

Проинтегрировав, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}P = Kl + \mu\delta V \frac{l^2}{2R} + c \left(h_n a - \frac{a^3}{6R} \right) + \frac{\mu V}{R} \left(\frac{h_n a^2}{2} - \frac{a^4}{8R} \right) - \\ - c \left(h_n l - \frac{l^3}{6R} \right) - \frac{\mu V}{R} \left(\frac{h_n l^2}{2} - \frac{l^4}{8R} \right), \end{aligned} \quad (5.142)$$

содержащее три неизвестных: a , l , h_n .

Совместно с уравнениями (5.139) и (5.105) получаем систему из трех уравнений для определения этих неизвестных по данным h_{n-1} , R , b , P , μ , δ , V .

В частном случае, если $h_{n-1} = 0$, $V=0$ (т.е. скорость движения колеса весьма мала), имеем

$$\frac{1}{b}P = Kl + c \left(h_1 \alpha - \frac{\alpha^3}{6R} \right) - c \left(h_1 l - \frac{l^3}{6R} \right), \quad (5.143)$$

$$l = \sqrt{2R(h_1 - \delta)} \quad \text{и} \quad a = \sqrt{2Kh_1}. \quad (5.144)$$

Дальнейшее исследование этого уравнения требует уже численного задания входящих в него величин P , b , R , c , δ и K .

Изложенные выше рассуждения можно использовать для определения сопротивления качения колеса по грунту. Величина этого сопротивления характеризуется моментом M , который определяется по формуле.

$$M = b \int_0^{\alpha} \xi p d\xi. \quad (5.145)$$

Если $x < \delta$, то, следуя формуле (5.103), имеем

$$\frac{1}{b}M = \int_0^{\alpha} \xi \left[c \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) + \mu V \frac{\xi}{R} \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) \right] d\xi. \quad (5.146)$$

После интегрирования и использования формулы (5.105) получим

$$\frac{1}{b}M = c \left(h_{n-1} \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{8R} \right) + \mu V \frac{a^3}{R} \left(\frac{h_{n-1}}{3} + \frac{a^2}{15R} \right). \quad (5.147)$$

Величина α определяется из уравнения (5.106):

$$\frac{1}{b}P = ch_{n-1}\alpha + \frac{1}{3}c \frac{a^3}{R} + \mu V \left(h_{n-1} \frac{a^2}{2R} + \frac{a^4}{8R^2} \right). \quad (5.148)$$

Нетрудно видеть, что при $h_{n-1} = 0$ и $\mu = 0$

$$a = \sqrt[3]{\frac{3PR}{cd}}. \quad (5.149)$$

Подставляя a в формулу (5.147), имеем

$$M = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{81}{cd} P^4 R}. \quad (5.150)$$

Сила трения качения выражается формулой $F = M/R$. Следовательно,

$$F = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{81P^4}{cdR^2}}. \quad (5.151)$$

При достаточно больших скоростях движения, считая $h_{n-1} = 0$ и сохраняя в формулах (5.147) и (5.148) лишь члены, имеющие множитель V , получаем

$$\frac{1}{b} M = \mu V \frac{\alpha^5}{15R^2}; \quad (5.152)$$

$$\frac{1}{b} P = \mu V \frac{\alpha^4}{8R^2}. \quad (5.153)$$

Исключая из этих выражений α , придем к формулам

$$M = \frac{8}{15} \sqrt[4]{\frac{8P^5 R^2}{b\mu V}}; \quad (5.154)$$

$$F = \frac{M}{R} = \frac{8}{15} \sqrt[4]{\frac{8P^5}{b\mu VR^2}}. \quad (5.155)$$

С увеличением скорости сопротивление качению уменьшается.

В случае $x > \delta$ в соответствии с формулой (5.126) будем иметь

$$M = b \int_0^{\alpha} \xi \left(K + \mu \delta V \frac{\xi}{R} \right) d\xi \quad (5.156)$$

или после интегрирования

$$\frac{1}{b} M = K \frac{\alpha^2}{2} + \mu \delta V \frac{\alpha^3}{3R}. \quad (5.157)$$

Величину α находим из соотношения (5.157):

$$\frac{1}{b}P = K\alpha + \mu\delta V \frac{\alpha^2}{2R}. \quad (5.158)$$

При $\mu = 0$ аналогично предыдущему получим

$$M = \frac{P^2}{2Kb} \quad \text{и} \quad F = \frac{P^2}{2KbR}. \quad (5.159)$$

Напротив, при $K = 0$ и больших значениях V приближенно

$$\frac{1}{b}M = \mu\delta V \frac{\alpha^3}{3R}, \quad (5.160)$$

$$\frac{1}{b}P = \mu\delta V \frac{\alpha^2}{2R}. \quad (5.161)$$

Исключая из последних соотношений α , получим

$$M = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2P^3R}{\mu\delta Vb}}. \quad (5.162)$$

Следовательно, сила трения качения **выражается** формулой

$$F = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2P^3}{\mu\delta VbR}}. \quad (5.163)$$

В последнем случае ($x > \delta$) можно исследовать влияние скорости движения центра колеса V на силу трения качения. Если ввести безразмерные величины φ , ψ m и u , связанные с величинами φ , P , M и V соотношениями

$$a = R\varphi; \quad P = KbR\psi; \quad M = KbR^2m; \quad V = \frac{K}{\mu\delta}u, \quad (5.164)$$

то формулы (5.157) и (5.158) примут вид:

$$m = 1/2\alpha^2 + 1/3u\varphi^3; \quad (5.165)$$

$$\psi = \alpha + 1/2u\varphi^2. \quad (5.166)$$

Последнее соотношение представляет собой квадратное уравнение для величины φ . Решив его, находим

$$\varphi = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2u\psi}}{u} . \quad (5.167)$$

Подставив формулу (5.167) в выражение (5.165), получим зависимость m от u , что и будет характеризовать влияние скорости движения колеса на силу трения.

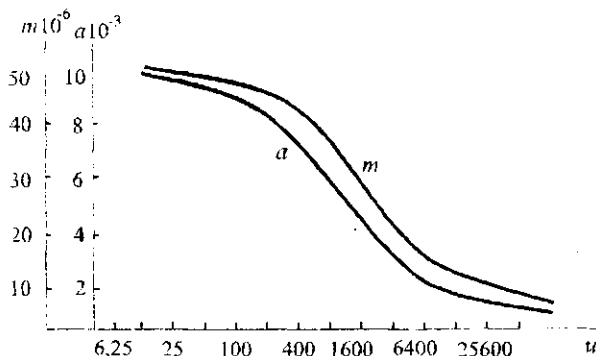


Рис. 5.17

На рис. 5.17 изображен график зависимости φ и m от u , при $\psi = 0.01$.

При малых значениях u согласно формуле (5.166) имеем $\varphi \cong \psi$ или более точно

$$\alpha = \psi - 1/2\psi^2 u . \quad (5.168)$$

Если теперь ввести (5.168) в соотношение (5.165) и пренебречь степенями u выше первой, придем к формуле

$$m' = 1/2\psi^2 - 1/6\psi^3 u . \quad (5.169)$$

При больших значениях u вернемся к формуле (1.162). В безразмерных величинах (5.164) эта формула имеет вид

$$m'' = 2/3\sqrt{2\psi^3/u} . \quad (5.170)$$

При построении теории качения по грунту колеса с пневматической шиной необходимо учитывать деформацию самого пневматика. Вследствие этого задача о колеобразовании становится более трудной, чем в случае жесткого колеса и остается достаточно сложной даже после введения упрощающих предположений.

Принятые допущения сводятся к следующим: 1) деформирование грунта подчиняется законам, изложенным ранее в этом параграфе; 2) деформация пневматика в каждой точке считается пропорциональной давлению пневматика на грунт; 3) поверхность пневматика принимается цилиндрической.

Геометрическое соотношение, связывающее осадку x какой-либо точки поверхности грунта в зависимости от ее расстояния ξ от вертикальной плоскости (рис.5.18), проходящей через ось колеса, с достаточным приближением таково:

$$x + y + \xi^2 / 2R = h_{n-1} + \alpha^2 / 2R, \quad (5.171)$$

где y — деформация пневматика;

h_{n-1} — глубина колеи, образовавшейся до очередного (n -го) прохода колеса;

α — расстояние наиболее удаленных передних точек поверхности соприкосновения колеса с грунтом от той же вертикальной плоскости.

В отличие от абсолютно жесткого колеса соприкосновение пневматика с грунтом будет прекращаться позади этой вертикальной плоскости на некотором расстоянии a' от нее. Поэтому глубина колеи h_n после прохода колеса связана с величинами h_{n-1} , a и a' соотношением (рис.5.18)

$$h_n + a'^2 / 2R = h_{n-1} + a^2 / 2R. \quad (5.172)$$

Для абсолютно жесткого колеса, разумеется, $a' = 0$.

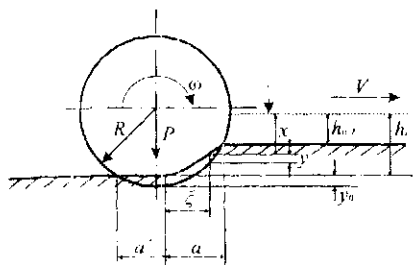


Рис. 5.18

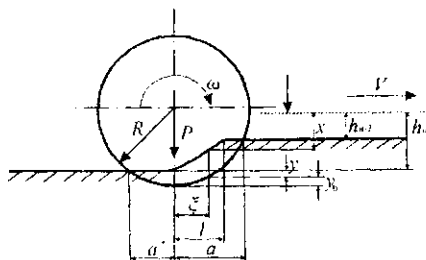


Рис. 5.19

Получим формулы, связывающие нагрузку на колеса с размерами поверхности соприкосновения пневматика с абсолютно жестким грунтом. В этом случае $a' = a$, следовательно,

$$P = \int_{-a}^{+a} b p d\xi, \quad (5.173)$$

где b - ширина пневматика.

Согласно принятому допущению о законе деформирования пневматика в формуле (5.173) следует принять

$$p = \beta y, \quad (5.174)$$

где β - характеристика для данного пневматика упругая константа, зависящая, в частности, от давления в камере пневматика.

В случае абсолютно жесткого грунта $h_{n-1} = 0$, $x = 0$, и соотношение (5.171) приводится к виду

$$y = a^2/2R - \xi^2/2R. \quad (5.175)$$

Подставляя выражение (5.175) в формулу (5.174) и затем в (5.173), получаем после интегрирования

$$P = \frac{2b\beta}{3R} a^3, \quad (5.176)$$

откуда

$$a = \sqrt[3]{\frac{3RP}{2\beta b}}. \quad (5.177)$$

В результате деформации пневматика ось колеса опустится на величину

$$y = \frac{a^2}{2R} = \sqrt{\frac{9P^2}{32\beta^2 b^2 R}}. \quad (5.178)$$

Коэффициент β можно получить в результате соответствующей обработки экспериментальных данных.

Рассмотрим наиболее простой случай качения пневматика с очень малой скоростью в предположении, что грунт уже имеет деформацию $x > \delta$. Очевидно, что деформация грунта (рис.5.19) начнется лишь на расстоянии $l > a$ от упоминавшейся выше вертикальной плоскости, когда осуществится равенство

$$p = \beta y = K, \quad (5.179)$$

т.е. давление пневматика на основание достигнет характерной для грунта константы K .

Полагаем в формуле (5.171) $h_{n-1} = 0$, после чего

$$y + x = a^2/2R - \xi^2/2R. \quad (5.180)$$

Подставляя в (5.180) $\xi = 1$, $y = K/\beta$, $x = 0$, получаем

$$K/\beta = a^2/2R - l^2/2R, \quad (5.181)$$

откуда

$$l = \sqrt{a^2 - 2RK/\beta}. \quad (5.182)$$

Заметим, что если

$$a^2 = 2RK/\beta. \quad (5.183)$$

то $l = 0$ и, следовательно, при

$$a^2 < 2RK/\beta \quad (5.184)$$

колея не углубляется. Так как в этом случае $a' = a$ (см. рис. 5.19), то на основании формулы (5.176), учитывая (5.184), получим неравенство

$$P \leq \frac{4Kb}{3} \sqrt{\frac{2RK}{\beta}}, \quad (5.185)$$

которое можно рассматривать как условие прохода пневматика по предварительно несколько укатанной колее без образования следа.

Пусть условие (5.185) не выполняется. Тогда на участке поверхности соприкосновения $a > \xi > l$ давление пневматика на грунт меньше постоянной K и определяется изменением его деформации. Грунт здесь не деформируется. Далее на участке $l > \xi > 0$ грунт уже деформируется и согласно принятому закону (5.89) давление на него при малой скорости движения равно постоянной K . Согласно соотношению (5.179) деформация пневматика остается при этом постоянной. Наконец, на задней части контактной поверхности, где деформация пневматика начнет уменьшаться, соответственно будет убывать и давление на грунт. Что же касается деформации грунта h , то она тут постоянна и равна осадке грунта в точке $\xi = 0$. Чтобы найти осадку в этой точке, в формуле (5.180) принимаем $x = h$:

$$h = a^2/2R - K/\beta. \quad (5.186)$$

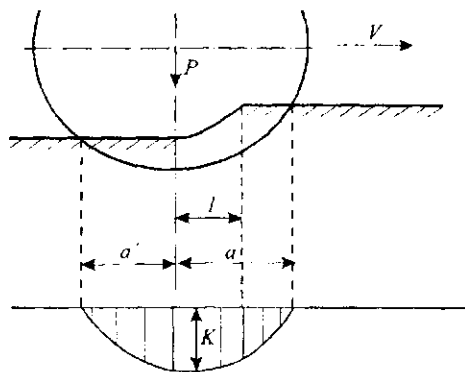


Рис.5.20

На рис.5.20 изображен график распределения давления P под пневматиком. Аналитическая зависимость, представляющая это распределение, имеет следующий вид:

$$p = \beta \frac{a^2 - \xi^2}{2R}, \quad a > \xi > l; \quad (5.187)$$

$$p = K, \quad l > \xi > 0; \quad (5.188)$$

$$p = \beta \frac{a'^2 - \xi^2}{2R}, \quad 0 > \xi > a'. \quad (5.189)$$

Полная нагрузка на колесо выражается очевидной формулой

$$\frac{1}{b} P = \int_{-a'}^0 p d\xi + \int_0^l p d\xi + \int_l^a p d\xi, \quad (5.190)$$

где

$$\int_{-a'}^0 p d\xi = \int_{-a'}^0 \beta \left(\frac{a^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R} \right) d\xi = \frac{\beta a'^3}{3R}. \quad (5.191)$$

Далее

$$\int_0^l p d\xi = \int_0^l K d\xi = Kl \quad (5.192)$$

$$\int_l^a p d\xi = \int_l^a \beta \left(\frac{a^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R} \right) d\xi = \beta \left(\frac{a^3}{3R} - \frac{a^2 l}{2R} + \frac{l^3}{6R} \right). \quad (5.193)$$

Собирая результаты интегрирования, получаем

$$\frac{1}{b}P = Kl + \frac{\beta}{3R} \left(a'^3 + a^3 - \frac{3}{2}a^2l + \frac{1}{2}l^3 \right). \quad (5.194)$$

Так как осадка пневматика при $\xi = 0$ равна

$$y_0 = a'^2/2R \quad (5.195)$$

и, с другой стороны, в этом месте давление на грунт равно постоянной K , то

$$\beta a'^2/2R = K, \quad (5.196)$$

откуда

$$a' = \sqrt{2KR/\beta}. \quad (5.197)$$

Из формулы (5.181) имеем

$$a^2 = 2KR/\beta + l^2. \quad (5.198)$$

Таким образом, из соотношения (5.194) можно, учитывая формулы (5.197) и (5.198), после приведения подобных членов получить следующее уравнение для определения l :

$$\frac{1}{b}P = \frac{\beta}{3R} \left[\left(\frac{2KR}{\beta} \right)^{3/2} + \left(\frac{2KR}{\beta} + l^2 \right)^{3/2} - l^3 \right]. \quad (5.199)$$

Зная l , нетрудно найти глубину образующейся колеи:

$$h = l^2/2R. \quad (5.200)$$

Произведем упрощение уравнения (5.199) в предположении, что l - малая величина по сравнению с a и, следовательно, по сравнению с $\left(2KR/\beta\right)^{1/2} = a'$.

Пренебрегая в выражении (5.199) степенями выше второй, получим приближенно

$$\frac{1}{b}P = \frac{\beta}{3R} \left(\frac{2KR}{\beta} \right)^{3/2} \left[1 + \left(1 + \frac{\beta l^2}{2KR} \right)^{3/2} - \left(\frac{\beta l^2}{2KR} \right)^{3/2} \right] \approx \frac{2K}{3} \sqrt{\frac{2KR}{\beta}} \left(2 + \frac{3\beta l^2}{4KR} \right), \quad (5.201)$$

откуда

$$l^2 = \sqrt{\frac{2R}{K\beta}} \left(\frac{P}{b} - \frac{4K}{3} \sqrt{\frac{2KR}{\beta}} \right). \quad (5.202)$$

Следовательно, глубина колеи согласно соотношениям (5.200) и (5.202) после каждого прохода колеса возрастает на величину $h = l^2/2R$. Формула (5.202) справедлива лишь в том случае, если выражение, стоящее в скобках, положительно. В противном случае, т.е. когда

$$P < \frac{4Kb}{3} \sqrt{\frac{2KR}{\beta}}, \quad (5.203)$$

согласно условию (5.185) колея углубляться не будет, т.е. следует считать, что $h = 0$.

В рассмотренном примере мы приняли скорость движения колеса достаточно малой и пренебрегли в выражении (5.89) членом, содержащим v . В противном случае исследование становится более сложным, и кривая деформирования грунта под пневматиком не будет иметь точек излома при $\xi = l$. Кроме того, деформация грунта будет продолжаться и позади вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса, т.е. $0 > \xi > -l'$ ($l' < a'$). Однако глубина образующейся колеи будет тем меньше, чем больше значение скорости движения колеса.

Рассмотрим другой частный случай, соответствующий закону Герстнера $p = cx$. Этот закон — частный случай закона:

$p = cx + \mu x \frac{dx}{dt}$, если вновь принять, что скорость движения колеса очень мала. Пусть колесо совершает свой первый проход по грунту, т.е. $h_{n-1} = 0$. Тогда соотношение (5.171) для этого случая примет вид (5.180).

Деформация грунта начнется сразу же с момента соприкосновения с ним колеса, т.е. в месте, где $\xi = a$, и закончится при $\xi = 0$ (рис.5.21).

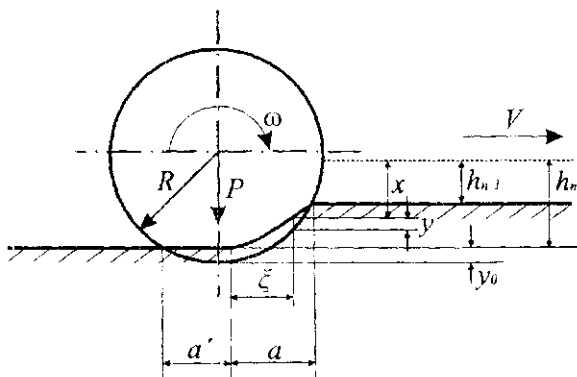


Рис. 5.21

Используя соотношения, справедливые для точек пневматика и точек грунта при

$$a > \xi > 0 : p = cx, \quad p = \beta y, \quad (5.204)$$

исключим x и y из равенства (5.180). Получим

$$\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\beta}\right)p = a^2/2R - \xi^2/2R. \quad (5.205)$$

Отсюда деформация пневматика в точке $\xi = 0$

$$y_0 = \frac{1}{\beta} P_0 = \frac{c}{c + \beta} \frac{a^2}{2R}. \quad (5.206)$$

При этом согласно формуле (5.180) при $\xi = 0$ имеем

$$h + y_0 = a^2/2R. \quad (5.207)$$

С другой стороны, в соответствие с той же формулой, учитывая, что при $\xi = -a'$ имеет место $x = h$, $y = 0$, приходим к равенству

$$h = a^2/2R - a'^2/2R. \quad (5.208)$$

Следовательно, исключая из выражения (5.207) согласно (5.208) осадку грунта h , получим почти очевидное равенство

$$y_0 = a'^2/2R. \quad (5.209)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (5.180) в пределах $-a' < \xi < 0$ принимает вид

$$h + y = a'^2/2R - \xi^2/2R. \quad (5.210)$$

Используя (5.208), исключая h (см. рис.5.21), имеем

$$y = a'^2/2R - \xi^2/2R. \quad (5.211)$$

Отсюда получаем формулу для определения давления на этом участке поверхности соприкосновения колеса с грунтом:

$$p = \beta(a'^2/2R - \xi^2/2R) \quad (-a' < \xi < 0). \quad (5.212)$$

Здесь a' определяется соотношениями (5.206) и (5.209) и представляется в виде

$$a' = a \sqrt{\frac{c}{c+\beta}}. \quad (5.213)$$

Давление колеса на грунт находим из формулы

$$\frac{1}{b} P = \beta \int_{-a'}^0 p d\xi + \int_0^a p d\xi. \quad (5.214)$$

Подставив в первый интеграл выражение p из формулы (5.212), а во второй - из (5.202) и произведя интегрирование, получим

$$\frac{1}{b} P = \beta \frac{a'^3}{3R} + \frac{c\beta}{c+\beta} \frac{a^3}{3R}. \quad (5.215)$$

Подставив в (5.215) a вместо a' , согласно (5.213), имеем

$$\frac{1}{b} P = \frac{a^3}{3R} \frac{c\beta}{c+\beta} \left(1 + \sqrt{\frac{c}{c+\beta}} \right). \quad (5.216)$$

Вместе с тем в соответствии с выражением (5.208) и учитывая (5.213), получим

$$h = \frac{a^2}{2R} - \frac{a'^2}{2R} = \frac{\beta}{c+\beta} \frac{a^2}{2R}. \quad (5.217)$$

Подставляя a , из соотношения (5.216), после упрощений приходим к окончательной формуле для определения глубины колеи, образовавшейся после первого прохода колеса:

$$h = \frac{1}{2} \beta c R^{-1/3} \left[\frac{3P}{b} \left(\sqrt{\frac{c+\beta}{c}} - 1 \right) \right]^{2/3}. \quad (5.218)$$

При следующем проходе колеса деформация грунта начнется не в точке $\xi = a$, а несколько ближе к вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса в той точке, где давление на грунт со стороны пневматика достигнет значения ch .

Таким образом, схема деформирования пневматика и грунта в этом случае примерна та же, что и в рассмотренном примере, когда $x > \delta$. При последующих проходах колеса начало деформации грунта под пневматиком будет все более и более приближаться к упомянутой вертикальной плоскости, пока, наконец, деформация грунта не прекратится. В этом случае можно считать, что грунтовая дорога "укатана".

Если движение колеса происходит по одной и той же колее, то нетрудно получить выражение для предельной глубины колеи h_{\max} . Так как в пределе грунт не деформируется, то согласно формулам (5.178) и (5.179) максимальное давление пневматика на грунт

$$p_0 = \beta y_0 = 3 \sqrt{\frac{9\beta P^2}{32 b^2 R}} = ch_{\max}. \quad (5.219)$$

Отсюда для искомой предельной колеи получим формулу

$$h_{\max} = \frac{1}{c} \sqrt[3]{\frac{9\beta P^2}{32 b^2 R}}. \quad (5.220)$$

5.5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЕСА С ГРУНТОМ С УЧЕТОМ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Силы сопротивления качению являются главной характеристикой перемещения движителей, так как оказывают непосредственное влияние на тягово-сцепные качества, проходимость машин и общую эффективность их использования.

Аналитическое исследование контакта колесного движителя и грунта на основе точных соотношений математической теории упругости чрезвычайно сложно. Оно значительно упрощается при использовании достаточно простой модели, приближенно описывающей взаимодействие в контакте.

В данном параграфе приводятся некоторые результаты аналитического решения задачи о качении колесного движителя по криволинейной в плане поверхности грунта с использованием модели А.Ю. Ишлинского.

При равномерном движении по поверхности грунта колесный движитель может работать в режимах ведущего и свободного колес. В режиме ведущего колеса крутящий момент колесного движителя расходуется как на преодоление сопротивления качению, так и на создание силы тяги. Режим свободного колеса обусловлен отсутствием силы тяги. Преобразование крутящего момента в силу тяги и из-за сопротивления качению в значительной степени связано с потерями на гистерезис и на трение на участках скольжения.

Рассмотрим взаимодействие колесного движителя и грунта без учета скольжения. Контакт тел (рис. 5.22) можно рассматривать как соприкосновение двух поверхностей: поверхности колесного движителя, отнесенной к прямоугольной подвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$, и поверхности грунта, отнесенной к неподвижной системе координат $Ox_2y_2z_2$.

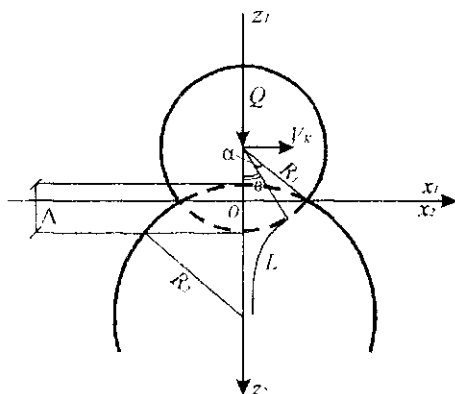


Рис.5.22

Пусть в рассматриваемый момент времени оси x_1 и x_2 лежат в плоскости, касательной к обоим телам, а оси z_1 и z_2 совместим соответственно с внутренними нормальными поверхностями колеса и грунта.

В дальнейшем модули свойств материалов, выражения смещений, напряжений и других величин, относящихся к колесу, будем отмечать индексом 1, а к грунту – индексом 2. При равномерном движении колесного движителя движение среды можно считать установившимся по отношению к системе координат $Ox_1y_1z_1$, движущейся поступательно вместе с центром колеса. Тогда, согласно теории Герца, уравнения поверхностей контактирующих тел до их деформации в окрестности точки можно представить в виде суммы функционалов [10]:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= A_1(x_1, y_1, z_1) + B_1(x_1, y_1, z_1); \\ z_2 &= A_2(x_1, y_1, z_2) + B_2(x_1, y_1, z_2), \end{aligned} \right\} \quad (5.221)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} x_1^2 - \frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2} x_2^2 \right]; \quad B_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial y_1} x_1 x_2;$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_1^2} x_1^2 - \frac{\partial^2 z_2}{\partial y_1^2} x_2^2 \right]; \quad B_2 = \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_1 \partial y_1} x_1 x_2.$$

Положим, что радиусы кривизны поверхностей велики по сравнению с размерами контакта. Тогда задача сводится к взаимодействию двух полупространств. Обозначим u_1 и u_2 вертикальные смещения точек обеих соприкасающихся поверхностей, лежащих на одной нормали к касательной плоскости x_1y_1 (x_2y_2) в направлении осей x_1 и x_2 . Тогда нормальные смещения внутри зоны контакта будут связаны соотношением

$$u_1 + u_2 = \Delta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_1^2} \right) x_1^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial y_2^2} \right) y_1^2, \quad (5.222)$$

где Δ — сближение тел.

Рассмотрим случай плоской деформации. Пусть ось колеса движется со скоростью $v_k = \text{const}$, а вращение колеса происходит с постоянной угловой скоростью ω_1 . Участок $(-a \leq x_1 \leq a)$ оси x_1 , соответствующий области контакта, также перемещается вдоль оси x_1 со скоростью v_k . Связь между координатами x_1 и x_2 одной и той же точки в области контакта представим в виде $x_1 = x_2 - v_k t$.

На границе тел имеем: 1) нормальные и тангенциальные напряжения равны на всей линии контакта; 2) на участке $(-a, a)$ равны скорости точек горизонтальных перемещений колеса и точек (грунта); 3) в области контакта нормальные смещения u_1 и u_2 в обоих телах определяются соотношением

$$u_1 + u_2 = \Delta - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{R_1} + \frac{x_2^2}{R_2} \right), \quad (5.223)$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны колеса поверхности грунта.

На колесный движитель и грунт в области контакта действует нормальное давление

$$q_n(x_1) = \frac{2q}{\Pi a^2} \sqrt{a^2 - x_1^2}, \quad (5.224)$$

где

$$a = \frac{2\sqrt{\Pi}}{\Pi} \sqrt{\frac{q(K_1 + K_2)}{1/R_1 + 1/R_2}}; \quad K_i = \frac{l}{E_i} \quad (i=1,2), \quad (5.225)$$

- E_i — коэффициенты упругости шины и полной деформации грунта;
 $q = Q/l$ — погонная нормальная нагрузка;
 Q — нормальная сила;
 l — длина плоскости контакта.

Нормальные смещения точек грунта в зоне контакта определим считая, что колесо движется по бесконечно большому числу упругих стержней. При отсутствии проскальзывания поверхностей имеем

$$u_2 = R_1(\cos \Theta - \cos \alpha), \quad (5.226)$$

где Θ — угол между вертикалью и радиусом колеса, проведенным к точке пересечения поверхности колеса с концом элементарного стержня L ;

α — угол, который образует с вертикалью радиус колеса, проведенный к началу переднего участка линии контакта.

Теоретические и экспериментальные исследования [9, 10] показали, что задний участок линии контакта пневматической шины с грунтом может считаться прямолинейным, и перемещение в зоне разгрузки можно не учитывать. Пусть $\alpha = \text{const}$. Угол Θ определяет горизонтальные и вертикальные перемещения точек грунта в зоне контакта. Вертикальные смещения точек колеса в зоне контакта определим из формул (5.223) и (5.226):

$$u_1 = \Delta - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{R_1} + \frac{x_2^2}{R_2} \right) - R_1(\cos \Theta - \cos \alpha). \quad (5.227)$$

Если принять $\cos(q_n, u_i) \approx I$ ($I = 1, 2$), то погонная мощность, расходуемая в зоне нагружения, для колесного движителя

$$N_1 = q / 2\omega_1 R_1 \left[\frac{4}{3\pi} a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \sin \omega_1 l \right]. \quad (5.228)$$

Погонная мощность в зоне нагружения грунта

$$N_2 = q / 2 R_1 \omega_1 \sin \omega_1 t. \quad (5.229)$$

Мощность гистерезисных потерь, расходуемую на деформирование колесного движителя и грунта, определим так [6]:

$$N_r = N^* - N^{**}, \quad (5.230)$$

где N^* — мощность в зоне нагружения;

N^{**} — мощность в зоне разгрузки.

Тогда коэффициент потерь на гистерезис можно определить как отношение мощности гистерезисных потерь к мощности в зоне нагружения N^* , т. е. $\alpha_x = N_r / N^*$. Пусть α_{k1} и α_{k2} — коэффициенты гистерезисных потерь в материалах колесного движителя и грунта при деформировании тел. Тогда выражение для погонной силы, компенсирующей потери на гистерезис, можно записать

$$P_f = \frac{l}{\omega_1 R_1} (a_{k1} N_1 + a_{k2} N_2), \quad (5.231)$$

где P_f — сила сопротивления качению.

Из формулы (5.231) определим коэффициент сопротивления качению $f_r = P_f / Q$ из-за потерь на гистерезис

$$f_r = \frac{l}{Q \omega_1 R_1} (a_{k1} N_1 + a_{k2} N_2). \quad (5.232)$$

Отметим, что если движение колесного движителя происходит по горизонтальному основанию ($R_2 = \infty$), то соотношения (5.228 — 5.232) упрощаются.

На рис. 5.23 показана кривая зависимости f_r от a_{k2} при следующих параметрах: $l=0,25$ м; $a_{k1}=0,04$; $Q=28$ кН; $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$; $E_1=6000$ кПа; $R_1=R_2=0,5$ м; $\omega_1=12$ с⁻¹; $v_k=0,06$ м/с; $t=0,4$ с. Приведенные данные соответствуют работе колесного движителя на очень рыхлом (насыпном свежеспаванном) грунте.

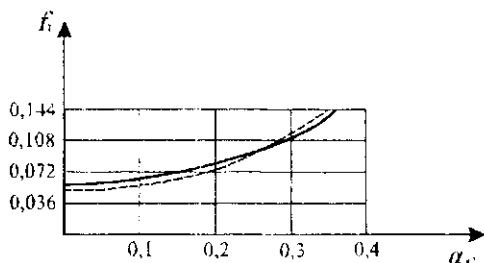


Рис. 5.23

Из графика следует, что с увеличением коэффициента потерь на гистерезис грунта α_{k2} растет и сила сопротивления качению. При этом в промежутке изменений α_{k2} от 0 до 0,1 увеличивается незначительно коэффициент гистерезисных потерь, а в дальнейшем наблюдается резкий рост f_r .

Влияние коэффициента полной деформации грунта E_2 на изменение коэффициента сопротивления качению показано на рис. 5.24.

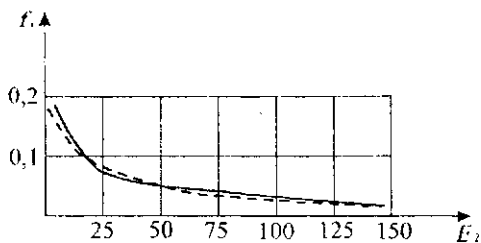


Рис. 5.24

Из графика видно, что для рыхлого грунта $E_2=5-25$ коэффициент сопротивления качению выше, чем для уплотненного $E_2=50-100$ и плотного $E_2=100-150$ грунта. Результаты получены при следующих параметрах $l=0,25$ м; $\alpha_{k1}=0,04$; $\alpha_2=0,09$; $Q=28$ кН; $\mu_1=\mu_2=0,3$; $E_1=6000$ кПа; $R_1=R_2=0,5$ м; $\omega_1=24$ с⁻¹; $v_k=0,12$ м/с; $t=0,2$ с.

В заключение отметим, что результаты рассмотренной контактной задачи квазистатики с упрощенной моделью грунта хорошо согласуются с экспериментом (пунктирная кривая).

Учет явления гистерезиса позволяет получить более точную картину деформации тел.

5.6. ОПИСАНИЕ ПОЧВЫ С ПОМОЩЬЮ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРАНДТЛЯ

В реальных процессах взаимодействия колесного движителя и грунта деформирование можно с определенной степенью точности описывать с помощью гармонических или близких к ним законов. Это позволяет при исследовании деформирования грунта использовать результаты некоторых работ по амплитудно-зависимому внутреннему трению [6].

В данном параграфе в качестве описания деформируемости грунта предлагается реологическая модель, построенная на теории упругопластичного материала Прандтля. Под микропластическими деформациями будем понимать такие пластические деформации, которые имеют место при любом уровне напряжений, в том числе и при напряжениях, меньших макроскопического предела текучести материала.

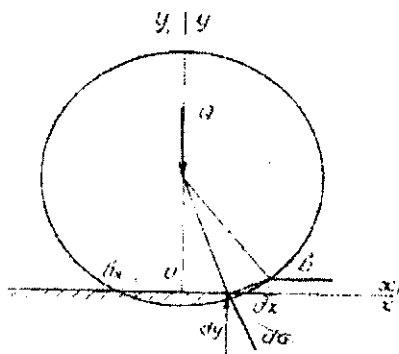


Рис. 5.25

Рассмотрим равномерное движение колеса по горизонтальной поверхности грунта (рис.5.25). Пусть Q — вертикальная нагрузка, действующая на ось колеса, которое движется со скоростью $v_k = \text{const}$. Вращение колеса происходит с постоянной угловой скоростью ω_1 . Воспользуемся подвижной Ox_1y_1 и неподвижной Oxy системами координат. Вследствие взаимных деформаций тела будут соприкасаться по некоторой линии, называемой линией контакта. Ось x_1 направим вдоль линии контакта, а ось y_1 — через ось колеса, ось x — вдоль оси

x_1 , а ось y — параллельно оси y_1 . Положим, что линии контакта соответствует участок $(-b \leq x \leq b)$ оси x . Связь между координатами x и x_1 одной и той же точки в области контакта представим в виде $x_1 = x + v_k t$, где t — время.

Установим некоторые свойства деформируемости грунта и колеса при одноосном нагружении. Представим реологическую модель грунта из параллельно работающих элементов Прандтля (рис. 5.26).



Рис. 5.26

Полную деформацию произвольного плеча i представим в виде суммы упругой E_1^e и пластической E_1^p деформаций. Упругая деформация грунта, например торфа, зависит от его ботанического состава, степени разложения и влажности. Пластическая деформация связана с необратимыми сдвигами твердых частиц. В зависимости от величины и времени действия нагрузки, а также от ботанического состава, степени разложения и влажности грунта тот или иной вид деформации имеет первостепенное значение. Опыты по вдавливанию штампов показывают, что даже при небольших нагрузках грунтам присущи как упругие, так и остаточные деформации. При этом полная деформация

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\Pi}{4} \frac{pD}{c}, \quad (5.233)$$

где p — вертикальное давление;

D — длина линии контакта;

c — коэффициент постели:

$$c = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2},$$

E_0 — модуль общей деформации грунта;

μ_0 — коэффициент бокового расширения грунта.

Связь между девиатором напряжений s_i и упругой деформацией в i -м плече имеет вид

$$S_i = 2G_i(\varepsilon_i - \varepsilon_i^p), \quad (5.234)$$

где G_i — модуль сдвига.

Обозначим τ_{si} — предел текучести в i -м плече. Тогда отношение $\tau_{si}/2G_i = k_i$ определит безразмерный предел текучести i -го плеча.

Считаем упругие характеристики всех плеч одинаковыми, а пределы текучести разными, непрерывно распределенными с плотностью вероятности $r(k)$. Тогда закон деформирования произвольного плеча в зоне контакта можно записать [17]:

$$\begin{cases} d\sigma = (\varepsilon - \varepsilon^p) E dk; \\ E(\varepsilon - \varepsilon^p) dk = E k dk \operatorname{sgn} \varepsilon^p, \end{cases} \quad (5.235)$$

где $d\sigma$ — напряжение в произвольном плече.

Физический смысл функции $\operatorname{sgn} \varepsilon^p$ заключается в том, что она равна +1 при $\varepsilon^p > 0$ и минус 1 при $\varepsilon^p < 0$.

Рассмотрим процесс нагружения, который соответствует участку $[0, b]$ зоны контакта колесного движителя и грунта (см. рис. 5.25).

Усилия во всех плечах в зоне контакта ($0 \leq x \leq b$) в соответствии с вероятностью $r(k)$ встретить то или иное k определим аналогично:

$$\sigma = E\varepsilon - E \int_0^b \varepsilon^p r(k) dk. \quad (5.236)$$

Пластические деформации в плечах рассматриваемой модели определяются из второго уравнения системы (5.235):

$$k \operatorname{sgn} \varepsilon^p = \dot{\varepsilon}^e. \quad (5.237)$$

Будем считать, что осадка поверхности грунта в окрестностях зоны контакта равна нулю, т. е. $e^p = e^e = 0$. На линии контакта $0 \leq x \leq b$ будет $\varepsilon^p > 0$, $\varepsilon^e > 0$. В этом случае функция $\operatorname{sgn} \varepsilon^p$ и

из уравнения (5.236) с учетом (5.237) имеем

$$\sigma = E\varepsilon - E \int_0^b (\varepsilon - k)r(k)dk. \quad (5.238)$$

Формула (5.238) выражает связь между напряжениями и деформациями в любой точке участка $[0, b]$ линии контакта. Аналогично выведем условия для определения пластической деформации. Пусть ε_0 представляет собой полную деформацию грунта плеча k в некоторой точке линии контакта. Тогда пластические деформации в зоне нагружения для данного плеча будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ок}^p &= 0, \text{ если } k \geq \varepsilon_0; \\ \varepsilon_{ок}^p &= \varepsilon_0 - k, \text{ если } k \leq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим процесс разгрузки, который соответствует участку $[-b, 0]$ зоны контакта колеса и грунта. Пластические деформации в плечах определим аналогично [17]:

$$\varepsilon_{kp} = \begin{cases} \varepsilon_0 + k - \varepsilon_*, & 0 \leq k \leq \frac{\varepsilon_*}{2}; \\ \varepsilon_0 - k, & \frac{\varepsilon_*}{2} \leq k \leq \varepsilon_0; \\ 0, & k \geq \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_* = \varepsilon_0 - \varepsilon). \end{cases} \quad (5.239)$$

Из формулы (5.236) с учетом (5.239) получим уравнение кривой разгрузки

$$\sigma = E\varepsilon - E \int_0^{\varepsilon_*/2} (k - \varepsilon_* + \varepsilon_0)r(k)dk - E \int_{\varepsilon_*/2}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - k)r(k)dk. \quad (5.240)$$

Рассмотрим процесс взаимодействия колеса с грунтом в зоне нагружения. В качестве функции распределения пределов тскучести $F(k)$ выберем функцию в виде

$$F(k) = Hk^a, \quad (5.241)$$

где H и a - некоторые постоянные больше нуля.

Тогда пределы текучести в плечах будут распределены с плотностью вероятности следующим образом:

$$r(k) = H\alpha k^{\alpha-1} . \quad (5.242)$$

Подставляя (5.241) в (5.237), получим реологическое выражение, описывающее связь между напряжениями и деформациями грунта в зоне нагружения

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \frac{H}{\alpha+1} \varepsilon^{\alpha+1}\right) . \quad (5.243)$$

В случае, если механические свойства колеса описываются упругой моделью, основное уравнение взаимодействия имеет вид

$$E_1 \varepsilon_1 = E \left(\varepsilon - \frac{H}{\alpha+1} \varepsilon^{\alpha+1} \right) . \quad (5.244)$$

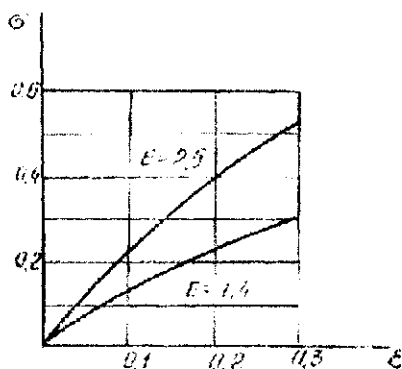


Рис.5.28

Деформацию грунта можно приблизительно описывать гармоническим законом

$$\varepsilon = A \cos \Omega t , \quad (5.245)$$

где A и Ω — соответственно амплитуда и частота деформирования грунта. Тогда на линии контакта в зоне нагружения имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{E}{E_1} \left[A \cos \Omega t - \frac{H}{a+1} (A \cos \Omega t)^{a+1} \right]. \quad (5.246)$$

Формулы (5.243) и (5.245) позволяют определить различные физические характеристики деформирования колеса и грунта [16].

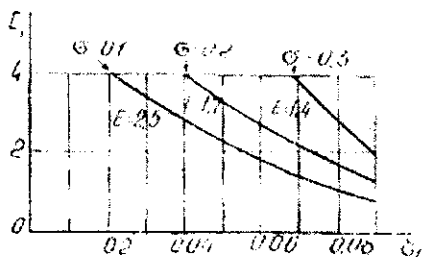


Рис.5.28

Апробация реологических соотношений (5.243), (5.244), (5.246) была проведена для торфяных грунтов. На рис. 5.27 показана зависимость $\sigma - \varepsilon$ тростниково-осокового торфа на линии контакта в зоне нагружения при различных значениях модуля полной деформации грунта. Деформации, соответствующие значению 0,3, являются максимальными радиальными деформациями грунта при взаимодействии с колесом. В зависимости от изменения модуля полной деформации грунта E напряжения на участке принимают различные значения. При постоянных значениях напряжений на линии контакта и в зоне нагружения наблюдается увеличение деформаций с уменьшением модуля Юнга (рис. 5.28).

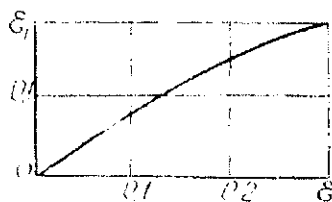


Рис.5.29

Существует зависимость между деформациями колеса и торфяного грунта в зоне нагрузки (рис.5.29). Значение $\varepsilon = 0,3$ соответствует максимальной радиальной деформации, а $\varepsilon = 0$ — деформации в точке начала контакта колеса с грунтом. При движении по линии контакта от точки b к точке O наблюдаем монотонный рост деформаций грунта и колеса, причем деформации грунта растут быстрее. Кривая была построена для значений $E=1,4$; $E_1=1,5$.

5.7. О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛАСТИЧНОГО КОЛЕСА И ПОЧВЫ СО СЛОЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Рассмотрим качение эластичного колеса по грунтовой поверхности с упруговязкопластичными свойствами, модель которой представлена на рис. 5.30 [18].



Рис.5.30

В основу модели положены три основных механизма деформирования грунта: упругий, пластичный и вязкий. Условие пластичности грунта примем в виде:

$$\sigma - ce_r^p - \mu e_r^p = k(P); \quad e_r^p = de_r^p / dt, \quad (5.247)$$

где σ — напряжение в зоне контакта;

e_r^p — пластические деформации;

c — модуль упрочнения;

k — коэффициент пластичности;

P — давление;

t — параметр времени.

Реологическое уравнение, описывающее напряженно-деформированное состояние грунта, в этом случае будет иметь вид:

$$\mu\sigma + (\dot{r}_r + c)\dot{\sigma} = E_r c e_r + \mu E_r e_r + E_r k, \quad (5.248)$$

где $\dot{\sigma} = d\sigma / dt$;

E_r — модуль Юнга;

e_r — полная деформация грунта, представляющая собой сумму упругой e_r^e и пластической e_r^p деформаций.

При равномерном движении колесного движителя перемещение грунтовой поверхности можно считать установившимся по отношению к системе координат $0x_1y_1$, движущейся поступательно вместе с центром колеса. Предположим, что колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω , а ось его движется со скоростью $v_k = \text{const}$. Тогда участок $a_2 \leq x \leq a_1$ оси x , соответствующий линии контакта, также перемещается вдоль оси x со скоростью v_k . Связь между координатами x_1 и x одной и той же точки в области контакта представим в виде $x_1 = x - v_k t$.

Представим зависимость радиальной деформации шины e_w от нормальных контактных напряжений σ в виде

$$\sigma = e_w E_w, \quad (5.249)$$

где E_w — коэффициент деформации шины.

Связь между деформациями и нормальными перемещениями запишем в виде формулы Коши:

$$e_r = \frac{du_r}{dy}; \quad e_w = \frac{du_w}{dy}. \quad (5.250)$$

Нормальные смещения в обоих телах определим в области загрузки $(0, a_1)$:

$$u_w = \frac{1}{2r_1}(a_1^2 - \eta^2) - u_r, \quad (5.251)$$

В области разгрузки $(0, a_3)$:

$$u'_w = \frac{1}{2r_2}(a_3^2 - \eta^2) - u'_r. \quad (5.252)$$

Здесь и далее штрихами обозначены величины, относящиеся к зоне разгрузки; $r_{1(2)}$ – радиальные радиусы. Определим r_1 и r_2 в зависимости от нагрузки G и давления воздуха в шине $P_{\text{ш}}$.

Линию контакта $[a_1, a_3]$ в зонах загрузки и разгрузки можно получить, вращая радиус r в плоскости xu с постоянной угловой скоростью. При этом считается, что точка M движется по радиусу со скоростью, пропорциональной расстоянию OM (рис. 5.31). Пусть точка A соответствует углам $\alpha = \beta = 0$. Обозначим расстояние от центра O до точки A . Согласно приведенным допущениям имеем:

в зоне загрузки

$$\frac{dr_1}{dt} = m_1 r_1, \quad (5.253)$$

в зоне разгрузки

$$\frac{dr_2}{dt} = m_2 r_2. \quad (5.254)$$

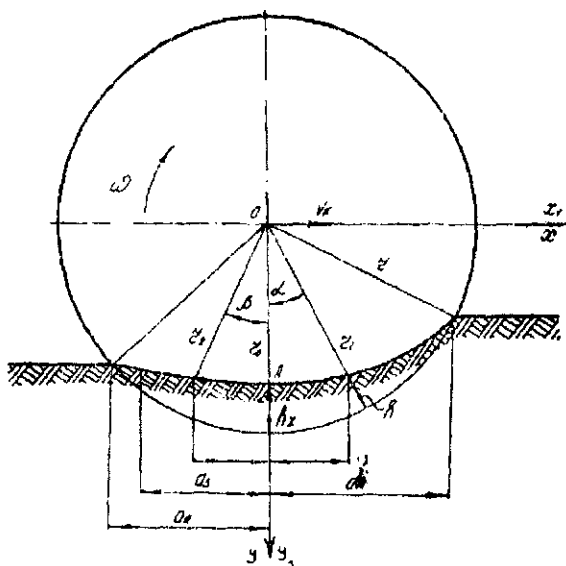


Рис. 5.31

Если $m_1 \doteq m_2 = 0$, то приходим к задаче о качении жесткого колеса по деформируемому грунту. После интегрирования уравнения (5.253) и (5.254) приводятся к виду:

$$r_1 = r_0 e^{m_1 t}, \quad r_2 = r_0 e^{m_2 t} \quad (5.255)$$

или

$$r_1 = r_0 e^{\delta_1 \alpha}, \quad r_2 = r_0 e^{\delta_2 \beta}. \quad (5.256)$$

где $\delta_i = m_i / \omega$ — безразмерная величина ($i=1,2$). Связь между r_1 и r_2 запишется так:

$$r_2 = r_1 e^{(\delta_2 \alpha - \delta_1 \beta)}. \quad (5.257)$$

Первое уравнение в (5.256) можно записать (см. рис. 5.31):

$$r - h = r_0 e^{\delta_1 \alpha}, \quad (5.258)$$

где h — радиальное перемещение точки колеса при его деформировании.

Можно записать также, что

$$r - r_0 = h_z = \lim_{\alpha \rightarrow 0} h \cos \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (r - r_0 e^{\delta_1 \alpha}) \cos \alpha. \quad (5.259)$$

Для небольших углов α , которым могут соответствовать упругие, неупругие и остаточные деформации грунта имеем

$$\frac{r \cos \alpha - h_z}{r_0 \cos \alpha} = e^{\delta_1 \alpha}, \quad (5.260)$$

откуда

$$\delta_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r \cos \alpha - h_z}{r_0 \cos \alpha}. \quad (5.261)$$

Подставим формулу (5.261) в (5.256) и получим

$$r_1 = r_0 e^{\ln \left(\frac{r}{r_0} - \frac{h_z}{r_0 \cos \alpha} \right)} = r_0 \left(\frac{r}{r_0} - \frac{h_z}{r_0 \cos \alpha} \right). \quad (5.262)$$

Связь между нормальным прогибом в зависимости от нагрузки G и давления P_w воздуха в шине устанавливается формулой

$$h_z = \frac{G}{1+P_w} \sqrt[4]{G^3}, \quad (5.263)$$

где G — коэффициент, определяемый экспоненциально и равный:

- 1) для диагональных шин низкого давления — 0,41–0,74;
- 2) для шин с регулируемым давлением — 0,45–0,63;
- 3) для широкопрофильных шин — 0,25–0,50.

Тогда с учетом выражения (5.263)

$$r_1 = \left[r - \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial (1+P_w)} \sqrt[4]{G^3} \right]. \quad (5.264)$$

Таким образом, для любой точки линии контакта можно найти r_1 . Радиус r_2 определяется аналогично:

$$r_2 = \left[r - \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial}{\partial (1+P_w)} \sqrt[4]{G^3} \right]. \quad (5.265)$$

Используя представления

$$\sigma = \frac{d\sigma}{dx} x; \quad e = \frac{de}{dx} x \quad (5.266)$$

и учитывая, что $x = v_k$, уравнение (5.248) примет вид

$$\sigma^* = E_r e_r^*, \quad (5.267)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где} \quad \sigma^* &= \left[(E_r + c)\sigma - \frac{1}{c} v_k \mu \frac{d\sigma}{dx} - \frac{1}{c} E_r k \right]; \\ e_r^* &= e_r - \frac{1}{c} v_k \mu \frac{de_r}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (5.268)$$

Уравнение (5.267) представляет собой линейную связь между значениями фиктивных напряжений и деформаций. Для определения напряжений σ^* на линии контакта используем метод сопряжения. После преобразований получим:

$$\sigma = \frac{\sqrt{(\eta_0 - a_1)(a_3 + \eta_0)}}{HN} \cdot \frac{(1 + P_w)}{\left[r_{1(2)}(1 + P_w) - \partial^4 \sqrt{G^3} \right]} \int_{-a_3}^{a_1} \frac{\eta d\eta}{\sqrt{(\eta - a_1)(a_3 - \eta)}}, \quad (5.269)$$

где $N = E_{ul} E_r / 12$;

η_0 — точка контакта.

Из формулы (5.268) с учетом (5.269) получим истинные напряжения:

$$\sigma = \frac{c}{E_r + c} \left(e^{\frac{c}{E_r} \epsilon} + 1 \right) \left[\frac{E_r k}{c} + \frac{E_{ul} E_r}{12} \frac{(a_1 - a_3)(1 + P_w) \sqrt{(a_1 - \eta_0)(a_3 - \eta_0)}}{\left[(1 + P_w) r_{1(2)} - \partial^4 \sqrt{G^3} \right]} \right]. \quad (5.270)$$

Таким образом, зависимость напряжений σ от свойств грунта и шины выражается формулой (5.270).

5.8. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СВОЙСТВ ПОЧВЫ ПРИ ЕЕ УПЛОТНЕНИИ КОЛЕСНЫМИ ДВИЖИТЕЛЯМИ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

В реологических моделях почвы величины X и U выражают такие свойства, как упругость, вязкость, пластичность, упрочнение. В общем случае уравнение состояния почвы будет иметь следующий вид:

$$F(\sigma, \epsilon, \alpha, E, \eta, k, c, \dot{\epsilon}) = 0, \quad (5.271)$$

где σ — напряжение;

ϵ — деформация;

α — концентрации фаз почвы;

E — модуль упругости;

η — модуль вязкости;

k — модуль пластичности;

c — коэффициент упрочнения;

$\dot{\epsilon}$ — скорость деформации.

Подставляя в формулу (5.271) все величины в виде математического ожидания и флуктуации, можно получить известными методами [2] уравнение, описывающее среднее состояние стохастически неоднородной упруговязкопластичной почвы:

$$\Phi(\langle \sigma \rangle, \langle \varepsilon \rangle, \langle \alpha \rangle, \langle E \rangle, D_E \dots) = 0. \quad (5.272)$$

Здесь угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают математическое ожидание, D — дисперсию соответствующей величины.

Функции распределения плотностей вероятности параметров почвы обычно строятся по опытным данным или на основании теоретических предпосылок. В результате экспериментального определения модуля упругости на торфяной почве до прохода движителя было установлено, что он изменяется в пределах 29—37 Н/м². Была построена гистограмма, на основании которой величина E получила треугольное распределение.

Закон распределения имеет вид:

$$f(E_0) = \begin{cases} 0 & E_0 < 29, \\ \frac{4(E_0 - 29)}{64} & 29 < E_0 \leq 33, \\ \frac{4(37 - E_0)}{64} & 33 < E_0 < 37, \\ 0 & E_0 \geq 37. \end{cases}$$

Запишем функцию распределения:

$$F(E_0) = \begin{cases} 0 & E_0 < 29, \\ \frac{2(E_0 - 29)^2}{64} & 29 < E_0 \leq 33, \\ 1 - \frac{(37 - E_0)^2}{32} & 33 < E_0 < 37, \\ 1 & E_0 \geq 37. \end{cases}$$

При указанном законе распределения математическое ожидание и дисперсия модуля упругости будут:

$$\langle E_0 \rangle = 33 \text{ Н/м}^2; \quad D_{E_0} = 2,66 \text{ Н/м}^2.$$

Модуль упругости зависит от концентрации частиц рассматриваемого объема:

$$d \langle E \rangle = A \langle E_0 \rangle d \langle \alpha \rangle, \quad (5.273)$$

откуда

$$\langle E \rangle = \langle E_0 \rangle [1 + A(\langle \alpha \rangle - \langle \alpha_0 \rangle)], \quad (5.274)$$

где $\langle \alpha_0 \rangle$ — концентрация частиц, соответствующая состоянию почвы с модулем упругости, равным $\langle E_0 \rangle$;

A — безразмерный параметр.

Формула (5.274) может быть использована только при исследовании уплотнения почвы. При воздействии движителя на почву скорость изменения концентрации частиц пропорциональна нагрузке P :

$$\frac{d \langle \alpha \rangle}{dt} = BP \langle \alpha \rangle, \quad (5.275)$$

где B — размерный параметр.

Из формулы (5.275) получим

$$\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_0 \rangle e^{\int PB dt}. \quad (5.276)$$

Тогда математическое ожидание модуля упругости примет вид

$$\langle E \rangle = \langle E_0 \rangle [1 + A \langle \alpha_0 \rangle (e^{\int PB dt} - 1)]. \quad (5.277)$$

При постоянных значениях P и B имеем

$$\langle E \rangle = \langle E_0 \rangle [1 + A \langle \alpha_0 \rangle (e^{PBt} - 1)]. \quad (5.278)$$

Плотность совместного распределения случайных величин η и k будет:

$$f(\eta, k) = \begin{cases} a \sin(\eta + k) & \text{при } 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq k \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{при любых значениях } \eta \text{ и } k. \end{cases}$$

Вначале определим коэффициент a . На основании свойства плотности вероятности имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin(\eta + k) d\eta dk = 1,$$

откуда

$$a = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\eta + k) d\eta dk \right)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Функция распределения системы примет вид:

$$F(\eta, k) = \begin{cases} 0 & \eta \leq 0; k \leq 0 \\ \frac{1}{2} [\sin \eta + \sin k - \sin(\eta + k)] & 0 < \eta < \frac{\pi}{2}; 0 < k < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} (1 + \sin \eta - \cos \eta) & 0 < \eta < \frac{\pi}{2}; k \geq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} (1 + \sin k - \cos k) & \eta \geq \frac{\pi}{2}; 0 < k < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \eta \geq \frac{\pi}{2}; k \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины модуля вязкости

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \sin(\eta + k) d\eta dk = \frac{\pi}{4}.$$

Определим дисперсию

$$D_{\eta} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta^2 \sin(\eta + k) d\eta dk - \langle \eta \rangle^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

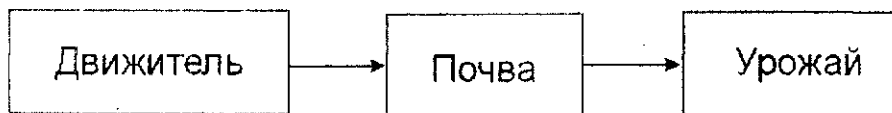
Математическое ожидание и дисперсия модуля пластичности в силу симметрии плотности вероятности имеют вид

$$\langle \eta \rangle = \langle k \rangle = \frac{\pi}{4},$$
$$D_{\eta} = Dk = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Полученные выражения математических ожиданий и дисперсий используются в уравнении взаимодействия движителя с почвой, которое можно получить путем аналитического решения или численно.

5.9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПЛОТНЕНИЯ ПОЧВ И УСТОЙЧИВОСТИ АГРОЭКОСИСТЕМ

Современное сельскохозяйственное производство функционирует в условиях дефицита природных ресурсов, проблемы сохранения окружающей среды, усложняющейся структуры экологических связей. Поэтому объекты сельскохозяйственных исследований требуют целостного (холистического) восприятия. Так, для описания жизни растений в целом недостаточно, например, знать в отдельности процессы фотосинтеза, протекающие в листьях растений, развития корневой системы, обусловленные физико-химическими свойствами почв, и др. Важно иметь общее описание, которое бы позволило объединить различные факторы, увидеть перспективы развития растений.



Такое описание, близкое к достоверному процессу, можно проводить с помощью математических моделей. Известна структурная модель взаимодействия, в которой каждый блок

модели представлен в виде уравнений, описывающих физические свойства изучаемых объектов. Детализация явлений, происходящих в данном процессе, будет зависеть от поставленной цели и возможностей современного математического аппарата. В деградации почв особую роль играет колесный движитель, который в модели взаимодействия может быть описан свойствами пневматического колеса. Наиболее характерными деформациями колеса при движении по почве будут упругие или вязкоупругие. В большинстве практических задач колесо достаточно считать упругим, т.е. подчиняющимся закону Гука. В одномерном случае

$$\sigma = E_{\text{ш}} \varepsilon, \quad (5.279)$$

где σ — напряжение,

$E_{\text{ш}}$ — модуль упругости;

ε — относительная деформация.

В отдельных случаях напряженное и деформированное состояния колеса удобно представлять упруговязкой моделью Максвелла

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (5.280)$$

или Кельвина-Фойхта

$$s = E\varepsilon + m\dot{\varepsilon}, \quad (5.281)$$

где μ — коэффициент вязкости;

$$\dot{\varepsilon} = d\varepsilon / dt; \quad \dot{\sigma} = d\sigma / dt;$$

t — время.

Часто в задачах о деформировании почвогрунтов используется модель обобщенной вязкоупругой среды

$$\mu_1 \varepsilon + \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_D} + \mu_1 \frac{\sigma}{E_C},$$

где E_D — динамический модуль упругости;
 E_C — статический модуль упругости;
 μ_1 — параметр вязкости:

$$\mu_1 = \frac{E_D E_C}{(E_D - E_C) \mu} .$$

Почва является сложной многокомпонентной средой, деформирование которой, как правило, характеризуется остаточными деформациями. Упругие модели могут быть использованы для описания сильно уплотненных почв пахотного, а также подпахотного слоя.

Вязкопластическое поведение почвы описывается моделью Бингама-Шведова:

$$\sigma = k + \mu \dot{\epsilon}, \quad (5.282)$$

здесь k — коэффициент пластичности.

Для более точного физического описания процесса деформирования почвы нужна модель, которая учитывала бы структурные особенности почвы. Четыре фазы почвы: твердая, жидкая, газообразная и органическая в процессе деформирования ведут себя по-разному. Органические частицы (корневая система здесь не рассматривается) занимают 1% выбранного объема почвы и поэтому при построении реологической модели ими можно пренебречь.

Составим уравнения реологии для трех фаз почвы.

Деформация выбранного объема почвы будет

$$\epsilon = \epsilon_1 \alpha_1 + \epsilon_2 \alpha_2 + \epsilon_3 \alpha_3, \quad (5.283)$$

где ϵ_i, α_i ($i=1, 2, 3$) — деформация и концентрация фаз почвы соответственно газообразной, жидкой и твердой.

Для механической модели, представленной на рис. 5.32,

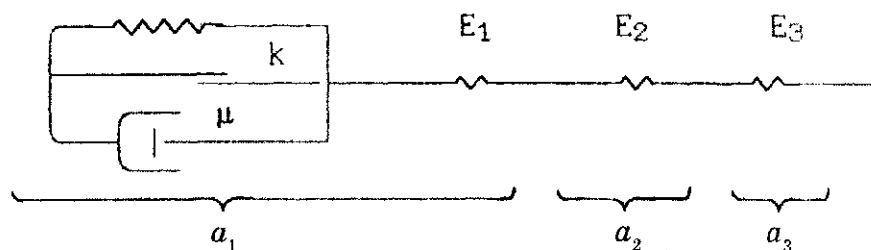


Рис. 5.32

уравнение состояния почвы

$$\dot{\varepsilon} = \alpha_1 \left(\frac{\sigma - k - \varepsilon c}{\mu} + \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \right) + \alpha_2 \frac{\dot{\sigma}}{E_2} + \alpha_3 \frac{\dot{\sigma}}{E_3}, \quad (5.284)$$

где E_1, E_2, E_3 — модули упругости соответственно газообразной жидкой и твердой фаз;

c — коэффициент упрочнения почвы.

Так как давление на почву, создаваемое сельскохозяйственными машинами, не превышает 10 атм., то твердую и жидкую фазы можно считать несжимаемыми. В этом случае уравнение состояния упрощается:

$$\dot{\varepsilon} = \alpha_1 \left(\frac{\sigma - k - \varepsilon c}{\mu} + \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \right). \quad (5.285)$$

Государственные стандарты на технику, используемую в сельском хозяйстве, предусматривают нормы воздействия движителей на почву. Они устанавливают максимальные значения давления колеса (гусеницы) на почву, которые гарантируют ее экологобезопасное агротехническое повреждение.

Для аналитической оценки давлений движителя на почву необходимо решить контактную задачу. Обычно при этом используют метод сопряжения [13]. В результате решения плос-

кой задачи получим значения контактных напряжений в зоне загрузки

$$\sigma = \left(k + \frac{2\sigma^* \omega T_p}{\alpha_1} \right) \left[1 - 1^{-(\alpha_1 - x_0)/l_p v} \right], \quad (5.286)$$

где

$$\sigma^* = \frac{E_{III} E}{2r(E + E_{III})} \sqrt{\frac{P_0 r (E + E_{III})}{E E_{III}} - x_0^2};$$

r — статический радиус колеса;

P_0 — величина, выраженная отношением осевой нагрузки к ширине колеса;

x_0 — коэффициент точки линии контакта;

α_1 — проекция на ось x линии контакта в зоне загрузки;

T_p — период релаксации в почве;

v — скорость оси колеса.

Формула (5.286) включает все основные параметры процесса взаимодействия движителя с почвой и дает возможность проследить влияние каждого реологического свойства и кинематических характеристик на изменение контактных напряжений в зоне загрузки. Контактные напряжения зависят также от объема свободного порового пространства, т.е. аэробных условий. Таким образом, данная модель взаимодействия учитывает не только реологические свойства контактируемых тел, но и пористое строение почвы, т.е. ее биологическую активность.

Большую роль в жизнедеятельности корневой системы растений и микроорганизмов играет структура подпахотного слоя, которая в процессе воздействия движителя на почву ухудшается из-за уплотнения. Поэтому важно знать, какое напряженное состояние возникает в подпахотном слое в результате действия того или иного движителя. Практика показывает, что распределение напряжений по глубине H вдоль оси z удобно описывать уравнением параболического типа [18]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = B \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}, \quad (5.287)$$

где B — коэффициент скорости передачи напряжений на почвенный скелет;

z — координата по оси z .

В случае выполнения условий

$$\sigma_{(z=0)} = 0; \quad \sigma(H=0, t) = \sigma_m; \quad \sigma(H, t) \sigma_H$$

и стационарного характера распределения напряжений в слое H , решение уравнения (5.287) с учетом (5.286) в точке $x_0 = 0$ будет

$$\sigma(z) = \left(k + \frac{2\sigma^* \omega \Gamma_p}{\alpha_1} \right) \left[1 - 1^{-\alpha_1 / r_p} \right] \left(1 - \frac{z}{H} \right), \quad (5.288)$$

где значения z изменяются от нуля до H .

Произведение первых двух скобок выражает значение контактного напряжения определяемого в точках $x_0 = 0$, $z = 0$.

С практической точки зрения интерес представляют напряжения, которые распространяются вдоль оси z до глубины $H = 1$ м.

Деградация почв ведет не только к уменьшению плодородия, но и к изменению состояния агроэкосистем. Энергетический цикл агроэкосистем отличается от природных биоценозов тем, что испытывает внешнее механическое воздействие со стороны сельскохозяйственных машин и агрегатов. Для восстановления трофических и других биологических связей агроэкосистемы необходимо вносить элементы питания, обеспечивать севооборот, регулировать интенсивность антропогенного воздействия и т.д. Агросистемы находятся под влиянием человека и это не дает им возможности быть в состоянии устойчивого природного равновесия, присущего ненарушенным биоценозам.

Устойчивость состояния агроэкосистем зависит и от физико-механических свойств почвы, которые во многом определяются давлением на почву сельскохозяйственных деформаторов, т.е. напряженным состоянием.

Рассмотрим реакцию агроэкосистемы, которую будем описывать линейным динамическим уравнением при нестационарном внешнем давлении на почву со стороны сельскохозяйственного движителя. Уравнение имеет вид [19]:

$$m\ddot{\sigma} + \mu\dot{\sigma} + k_0\sigma = P(t),$$

где m — масса колеблющихся частиц почвы под действием давлений $P(t)$;

k_0 — жесткость скелета;

σ — контактные напряжения.

Возмущение $P(t)$ можно считать случайным, что соответствует реальным процессам. Полагая

$$W_0^2 = \frac{k_0}{m}; \quad \frac{\mu}{m} = 2\omega_0\beta; \quad \frac{P(t)}{m} = z(t),$$

получим

$$\ddot{\sigma} + 2\omega_0\beta\dot{\sigma} + \omega_0^2\sigma = z(t).$$

Решение данного уравнения получим в виде

$$\sigma(t) = \sigma(t_0)\sigma_1(t-t_0) + \dot{\sigma}(t_0)\sigma_2(t-t_0) + \int_{t_0}^t h(t-\tau)z(\tau)d\tau,$$

где

$$\sigma_1(t) = 1 - \beta \sin \bar{\omega} t \left(\cos \bar{\omega} + \frac{3\omega_0}{\omega} \sin \bar{\omega} \right);$$

$$\sigma_2(t) = \frac{1}{\omega} 1 - \beta \sin \bar{\omega} t \sin \bar{\omega} t;$$

$$h(t) = \sigma_2(t);$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}; \quad 0 < \beta < 1;$$

Обычная процедура дает возможность получить математическое ожидание $m\sigma(t)$ и дисперсию $D\sigma(t)$ данного процесса.

В случае нормального распределения вероятность того, что σ лежит в малом интервале от σ до $+d\sigma$ в момент t , определяется выражением

$$\rho(\sigma)d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2D_\sigma^2} \right\} d\sigma,$$

где $\rho(\sigma)$ — плотность вероятности малых отклонений от среднего значения m_σ для $\sigma(t)$.

При больших отклонениях от среднего значения для обеспечения устойчивого состояния агроэкосистем желательно знать вероятность того, что контактное напряжение превзойдет величину, допускаемую экологобезопасной несущей способностью почвы

$$L[\sigma(t) - m_\sigma(t) > \sigma D_\sigma(t)] = 1 - \text{erf} \frac{\sigma}{\sqrt{2}},$$

где erf — интеграл вероятности.

Если распределение контактных напряжений не является нормальным, то вероятность больших отклонений от среднего значения согласно неравенству Чебышева будет

$$L[\sigma(t) - m_\sigma(t) > \sigma D_\sigma(t)] \leq \frac{1}{\sigma^2}.$$

Таким образом, представленные модели дают возможность оценивать процесс взаимодействия сельскохозяйственных деформаторов с почвой и судить о динамическом состоянии агроэкосистемы.

Оглавление

От авторов	3
Глава 1. Структурно-механический состав и физические свойства почв	6
1.1. Структурно-механический состав почв	6
1.2. Физические свойства почв	11
1.3. Аэрационные свойства почв	16
1.4. Тепловые свойства почв	19
Глава 2. Напряженное и деформированное состояние почвенных элементов	26
2.1. Напряжения в почвенных элементах	26
2.2. Перемещения и деформации в почвенных элементах	38
Глава 3. Математико-механические модели почв	46
3.1. Упругое тело	46
3.2. Пластичное тело	49
3.3. Вязкость и ползучесть	57
3.4. Тело Кельвина-Фойхта	62
3.5. Тело Максвелла	63
3.6. Вязкопластические тела	64
3.7. Упруговязкопластические тела	65
Глава 4. Методы определения напряжений в почве	67
4.1. Распределение напряжений в однородных почвогрунтах от гибкой бесконечной полосы	67
4.2. Метод Буссинеска	70
4.3. Распределение напряжений в почве при отсутствии механического воздействия	75
4.4. Формула Фрелиха	76
4.5. Метод круга	77
4.6. Метод полосной нагрузки	79
4.7. Метод суммирования Зене	79
4.8. Модуль деформации	81
4.9. Некоторые подходы к установлению закономерности сопротивления почв сжатию	82
Глава 5. Элементы теории контактного взаимодействия сельскохозяйственных деформаторов с почвой	87
5.1. Распределение силовых и кинематических характеристик в зоне контакта	87

5.2. Действие сил на полупростанство	91
5.3. Определение контактных напряжений при проскальзывании катка по почве	103
5.4. Задача о качении жестких и пневматических колес по деформируемому грунту (задача А.Ю.Ишлинского)	105
5.5. Взаимодействие колеса с грунтом с учетом гистерезисных явлений.	132
5.6. Описание почвы с помощью реологической модели Прандтля	138
5.7. О взаимодействии эластичного колеса и почвы со сложными свойствами	144
5.8. Основные параметры свойств почвы при ее уплотнении колесными движителями и их определение	149
5.9. Математическое моделирование уплотнения почв и устойчивости агроэкосистем	153
Литература	163

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цуриков А.Г.* Почвоведение. –М.: Агропромиздат, 1986.
2. *Куллен Л., Куперс Х.* Современная земледельческая механика. –М.: Агропромиздат, 1986.
3. *Вайюнина А.Ф., Корчагина З.А.* Методы исследования физических свойств почв. М.: Агропромиздат, 1986.
4. *Цитович Н.А.* Механика грунтов. –М.: Госстройиздат, 1963.
5. *Терзбушко О.И.* Основы теории упругости и пластичности. –М.: Наука, 1984.
6. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука. 1971.
7. *Работинов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. 1979.
8. *Вялов С.С.* Реологические основы механики грунтов. –М.: Выш. шк., 1978.
9. *Кацыгин В.В.* О закономерности сопротивления почв сжатию //Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – Мн., 1962. –Т.13. –С.15–17.
10. *Джэксон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.: «Мир», 1989.
11. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. –М. Наука, 1986. –Т.1.
12. *Викников С.Т., Проскуряков Б.В.* Гидрофизика. –Л.: Гидрометеоздат, 1988.
13. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980.
14. *Бабков В.Ф., Безрук В.М.* Основы грунтоведения и механика грунтов. – М.: 1967.
15. *Кузмарев А.С.* Структура механических свойств почвы //Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. –Мн., 1980. –№12. –С.25–28.
16. *Чигарев Ю.В.* Определяющие параметры свойств почвы при ее уплотнении колесными движителями и их определение //Сб. науч. тр. Повышение проходимости сельскохозяйственной техники на почвах с низкой несущей способностью. –Горки, 1989. –С.30–34.
17. *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. –М.: Наука, 1976.
18. *Скотников В.А., Чигарев Ю.В.* Аналитическое моделирование агротехнических свойств машин //Техника в сельском хозяйстве, 1990. –№2. –С.17–19.
19. *Кацыгин Е.В., Чигарев Ю.В.* Моделирование агроэкологических систем и их динамические свойства. –В кн.: Механизация и электрификация сельского хозяйства. –Мн.: Ураджай, 1990. –С.3–8.

Учебное издание

Чигарев Юрий Власович
Синкевич Петр Николаевич

Математические основы механики почв

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Базулько*
Компьютерная верстка *А.С. Ягелло*
Обложка *А.В. Мыцких*
Ответственный за выпуск *А.П. Аношко*

Подписано в печать 18.10.2004г. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 9,5. Уч.-изд.л. 9,6.
Тираж 500 экз. Зак. 284

Издательство УП "Технопринт".
Лицензия №02330/0056932 от 30.04.2004г.

Отпечатано УП "Технопринт".
Лицензия №02330/0133109 от 30.04.04.
220027, Минск, пр-т Ф.Скорины, 65, корп. 14, оф. 205.
Тел./факс: (017) 231-86-93.