Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 553–561

А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев, С. А. Пронкевич

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЛИНИЙ ТОКА ЭНЕРГИИ В МЕХАНИКЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Белорусский национальный технический университет,

Белорусский государственный аграрный технический университет

Аннотация. В статье рассматриваются представление линий тока энергии в неоднородной упругой среде и влияние неоднородности на устойчивость или неустойчивость распространения энергии. Обсуждается влияние неоднородности материала тела на режимы распространения в нем трещин.

Ключевые слова: неоднородная среда, деформация, пластичность, линии тока, энергия, дифференциальные уравнения.

УДК: 539.37

Известно, что имеется связь между уравнениями, описывающими распространение волн в неоднородной среде, и уравнением Кортевега де Фриза (КдФ) [1]. Проявление нелинейных эффектов в линейных, но неоднородных средах обусловлено тем, что перенос энергии в них происходит по линиям тока, имеющим весьма сложную структуру, характерную для нелинейной динамики в случае возникновения явлений типа детерминированного хаоса [2] и самоорганизации. Как известно, исследование этих явлений связано с рассмотрением динамических систем с сосредоточенными параметрами, которые могут быть описаны обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями. Уравнения в частных производных, которые описывают процессы в различных разделах механики сплошных сред исследованы значительно меньше. Наиболее исследованы эти явления в гидродинамике. В механике деформируемого твердого тела исследование этих вопросов становится все более актуальным, вследствие чего разработка качественных методов исследования уравнений в частных производных, описывающих деформирование и разрушение твердых тел, должна быть основана на рассмотрении общего количества энергии, подводимого извне к телу, трансформации энергии в соответствии с характером распространения ее в объеме. В однородных средах линии тока энергии имеют достаточно простой вид. В неоднородных телах геометрия траекторий линий тока энергии существенно зависит от характера распределения неоднородности. В деформируемых твердых телах можно выделить три типа состояний, когда уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, описывающим траектории линий тока энергий и соотношения вдоль них.

Распространение волнового пакета в приближении геометрической акустики описывается как движение волнового фронта (волновой поверхности), на котором при стягивании волнового пакета в поверхность нулевой толщины могут терпеть разрыв полевые величины. Перенос скачков полевых величин рассматривается вдоль лучей, являющихся линиями тока упругой энергии. В однородных телах геометрия лучей прямолинейная, в неоднородных – имеет сложный характер, причем имеет место аналогия с движением частиц в потенциальных полях

Поступила 24.06.2010

или под действием внешних сил. Общей закономерностью зависимости геометрии линий тока энергии от распределения неоднородности является течение энергии в те места объема тела, где может быть совершена максимальная работа по деформированию среды. Эти слабые места обладают меньшей жесткостью, прочностью, содержат повреждения в виде микротрещин, пор и т. д.

Как правило, при определенных нагрузках в этих местах возникают линии скольжения, развиваются трещины. В однородных средах траектории линий скольжения и трещины имеют простую геометрию, при учете неоднородности их геометрия может становиться также непредсказуемой, хаотичной.

1. Представление о линиях тока энергии в неоднородной упругой среде определяется для упругой среды из выражения для работы δW, совершаемой внешними силами над объемом V_0 [3]

$$\delta W = \int_{V_0} dT dv + \int_{V_0} d\Pi_0 w = \int_{V_0} d(\mathrm{T} + \Pi) dv, \tag{1}$$

где $d\Pi = \sigma_{ik} \cdot ds_{ik}$ - изменение потенциальной энергии единицы объема, т. е. внутренней энергии (dU) при постоянной энтропии или свободной энергии при изотермических условиях.

Работа внешних сил δw увеличивает полную упругую энергию $\mathrm{E}_0 = \int_{V_0} (\mathrm{T} + \Pi) dv$ на величину $d\mathrm{E}_0 = \delta w$.

Изменение энергии E, содержащейся в объеме за единицу времени, определяется выражением

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt} = \int_S \sigma_{ik} \frac{du_i}{\partial t} ds, \tag{2}$$

где вектор

$$P_k = -\sigma_{ik} \frac{du_i}{\partial t} \tag{3}$$

является вектором Умова-Пойнтинга, направление которого определяет направление распространения энергии, его длина равна количеству энергии, переносимому через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения энергии в единицу времени (плотность потока мощности).

Уравнения, которым удовлетворяют траектории линий тока энергии, получаются из принципа Ферма и могут быть записаны в виде [4]

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{\tau}, \ \ \frac{d\bar{\tau}}{ds} = g\,rad\,c - \bar{\tau}(g\,rad\,c \cdot \bar{\tau}). \tag{4}$$

Уравнения (4) нелинейные, так как скорость $\dot{A}$ является функцией пространственных координат $\bar{x}$.

Пусть в рассматриваемой среде имеется волновод, определяемый условием, что вдоль его оси волновое сопротивление имеет минимум.

Пусть в однородной среде ось волновода совпадает с координатной осью, например OZ, тогда лучи будут параллельны оси Z.

Рассмотрение неоднородности может приводить к устойчивому и неустойчивому распространению энергии вдоль оси волновода [5]. В первом случае можно получить фокусировку луча, если в поперечных сечениях волновода жесткость к оси уменьшается и не возрастает вдоль оси. Эти условия оказываются недостаточными, чтобы обеспечить волноводный характер распространения энергии. Возможно такое изменение жесткости вдоль оси волновода, которое будет приводить к стохастизации луча, в результате чего возможно просачивание энергии за границы волновода. В терминах частиц волновод является аналогом потенциальной ямы, а эффект просачивания соответствует появлению вероятности для частицы преодолеть потенциальный барьер. Для волн это означает выход линий тока энергии за границы волновода.

Гамильтониан, описывающий этот эффект, удобно представить в виде

$$H = H_0(q,\ p) + \varepsilon H_1(q,\ p),$$

где $H_0(q_k,\ p_k)$ описывает траектории линии тока в однородной среде, $H_1(q_k,\ p_k)$ при малом параметре ε характеризует возмущения траектории вследствие неоднородности среды, $\bar{q}$ – координаты, $\bar{p}$ – импульсы.

Функция Гамильтона для неоднородной среды имеет вид

$$H = -\left[h^2(\bar{\rho}, z) - \bar{p}^2\right],$$

где импульс $\bar{p}$ имеет вид

$$\bar{p} = n\dot{\bar{\rho}}/(1+\dot{\rho}^2)^{1/2}; \quad \dot{\bar{\rho}} = d\bar{\rho}/dz = d\bar{\rho}/ds.$$

Здесь $n = n(\bar{\rho}, z)$ – показатель преломления упругих волн в среде.

Заданием $n(\bar{\rho}, z)$ можно получать различные гамильтонианы, для которых исследованы различные сценарии перехода детерминированного движения в хаотическое.

Общий результат состоит в том, что при $H_1 > E_c$ (E_c - критический уровень) траектории линий тока становятся стохастическими [2] и должны исследоваться в рамках теории распространения волн в случайно неоднородных структурах [6-8].

Как известно [9], в идеальном случае при простом одноосном растяжении пластины из однородного упругого материала вдоль оси y начальная трещина $-\varepsilon < x < \varepsilon$ будет распространяться вдоль оси x прямолинейно. Если нагружение сложное, то траектория будет зависеть от истории нагружения. При этом, в принципе можно, решая задачу последовательными малыми пересчетами, определить взаимовлияние напряженного состояния на траекторию трещины и наоборот. Эксплуатация многих изделий происходит в условиях достаточно стабильных граничных условий, однако траектория трещины при этом может быть криволинейной вследствие неоднородности материала, полей остаточных напряжений, более того, непредсказуемой, что не позволяет в детерминированной постановке решить вопрос о прогнозировании траектории трещины в композиционном материале.

Рассмотрим неограниченную пластину в плоскости XOY, которая состоит из двух жестко скреплённых полупластин: $x \le 0$ – однородная изотропная среда, $x > 0$ – неоднородная изотропная среда. Пластина растягивается вдоль оси y, начальная трещина расположена вдоль оси x, $(-\varepsilon\langle x\langle\varepsilon)\ y = 0$. Обозначим упругие модули однородной среды $\lambda_0,\ \mu_0$, неоднородной – $\lambda(x,\ y),\ \mu(x, y)$.

Траекторию трещины будем искать на основании вариационного принципа теории трещин в виде [9]

$$\delta \int_C^D (2\gamma - P_1 u_1) ds = 0, \tag{5}$$

где γ – плотность поверхностной энергии материала, $P_i = \sigma_{ij} n_j$ – компоненты тензора напряжений на площадках, положение которых совпадает с поверхностью трещины, n_i – направляющий косинус внешней нормали к поверхности трещины, u_i – смещение берегов трещины, σ_{ij} – тензор напряжений материала, C, D – начало, конец трещины соответственно. Уравнение траектории трещины ищется в виде $y = y(x)$. Так как в данном случае рассматриваем простое нагружение, то кривизна траектории в неоднородной пластине будет зависеть только от распределения неоднородности.

Уравнение Эйлера для сформулированной задачи имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\left[\sqrt{1+y'^2}(2\gamma-P_iu_i)\right]\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\left[\sqrt{1+y'^2}(2\gamma-P_iu_i)\right]\right)=0. \tag{6}$$

Из формулы можно получить уравнение для траектории $y(x)$ в виде

$$\begin{gathered}\tfrac{y''}{A}B+y'y''\left(\tfrac{\partial}{\partial y'}B-\tfrac{\partial}{\partial y}B\right)+y'\tfrac{\partial}{\partial x}B+y'^2B+\\+A\left[-\tfrac{\partial}{\partial y}B+\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial y}B+y'\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}B+y''\tfrac{\partial}{\partial y'}\tfrac{\partial}{\partial y}B\right]=0.\end{gathered} \tag{7}$$

В уравнении (7) введены обозначения $A=1+y'^2,\ B=2\gamma-P_iu_i$.

Если полагать функционал и траекторию трещины достаточно гладкой (без учёта фрактального характера траектории трещины), то можно выбрать шаг разбиения для расчета траектории достаточно малым. Тогда отклонения траектории трещины на следующем шаге от направления распространения на предыдущем будут малыми, $y'\langle\langle 1$. В общем случае величина γ может зависеть от упругих свойств среды, но из-за выбранной малости шагов разбиения в первом приближении можно принять $\gamma\approx const$. Тогда уравнение (7) сводится [8] к существенно нелинейному уравнению вида

$$y''-y'f_1(x,\,y)(1+y'^2)+f_2(x,\,y)(1+y'^2)^2=0, \tag{8}$$

где введены обозначения

$$f_1(x,\,y)=\frac{\partial\ln Q(x,\,y)}{\partial x},\ f_2(x,\,y)=\frac{\partial\ln Q(x,\,y)}{\partial y},\ Q=(\sigma_{ij}n_iu_1)^{-1},\ y'=\frac{dy}{dx}.$$

В зависимости от конкретного вида неоднородности решения уравнения могут иметь различный характер: от периодического до хаотического [8]. Исследуем устойчивость решений уравнения (8).

Поскольку в данной задаче будем интересоваться реализацией, а не процессом, то временную зависимость не рассматриваем. Обозначим $z=y'$, тогда (8) перепишется в виде системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} y'=z\\ z'=zf_1(1+z^2)-f_2(1+z^2)^2\end{array}\right\}. \tag{9}$$

В общем виде второе уравнение системы (9) есть уравнение с разделяющимися переменными, но учёт сложной функциональной зависимости f_1, f_2 значительно усложняет ситуацию. Орбиты уравнения (9) в фазовой плоскости выражаются следующим образом

$$\frac{dz}{dy}=\frac{zf_1(1+z^2)-f_2(1+z^2)^2}{z}=f_1(1+z^2)-f_2\frac{(1+z^2)}{z}. \tag{10}$$

Если считать, что свойства среды гладко изменяются поперёк траектории распространения трещины, то при анализе можно пренебречь членами выше второго порядка. В этом случае имеем

$$\frac{dz}{dy}=f_1(1+z^2)-f_2\left(\frac{1}{z}+4+6z\right). \tag{11}$$

Прямое аналитическое интегрирование уравнения (11) не приводит к обозримым результатам. Однако соответствующим подбором неоднородности (функции f_1, f_2) возможно регулировать тип критических точек в фазовой плоскости. С точки зрения технологии, более логичным представляется рассмотреть задание f_2 (неоднородности вдоль оси Y). Так, при конструировании композиционного материала таким образом, что

$$\mathrm{f}_2=z^2/(1+4z+6z^2), \tag{12}$$

имеем положительный аттрактор, критической точкой является $z=0$ при условии $f=0$.

Строго говоря, заключение о возможности линейного анализа критических точек нелинейной системы (9) требует дополнительных исследований. Так, например, для выполнения условия существования стабильных и нестабильных многообразий необходимо [12] удовлетворение дополнительных условий

$$\lim_{\|z\to 0\|}\left\|\frac{\mathrm{f}_2\left(\frac{1}{z}+4+6z\right)+f_2}{\|z\|}\right\|=0,$$

что налагает требование $f_2=0(z^2)$, которому условие (12) не удовлетворяет. В этом случае можем положить

$$f_2=\mathrm{z}^{\xi}/(1+4z+6z^2),$$

где $\xi=2-\varsigma,\ \lim\limits_{x\to\infty}\varsigma=0$, при дополнительном условии $f_2=O(z)$.

Проведенный анализ показывает, что при распространении трещины в неоднородных материалах на геометрию траектории трещины влияет закон изменения свойств материала вдоль и поперёк траектории распространения трещины. Это позволяет в значительной степени регулировать характеристики траектории путём создания композитов заданной детерминированной структуры.

Рассмотрим условия возникновения стохастических режимов при распространении трещины. Компоненты вектора перемещений $u_i(x,\,y(x))$ в уравнении (8) разложим в ряд Тейлора по y и ограничимся линейным по y членом. Выражая коэффициент при линейном члене, $\partial u_i/\partial y$ как упругие деформации через напряжения, получим

$$\begin{gathered}N=\sigma_{ij}n_iu_j=\sigma_{12}n_1s_{22kl}\sigma_{kl}\tau_2+\tfrac{1}{2}\sigma_{22}n_2s_{22kl}\sigma_{kl}\tau_2+\\+\tfrac{1}{2}\sigma_{11}n_1s_{12ik}\sigma_{kl}\tau_2+\tfrac{1}{2}\sigma_{21}n_2s_{12ik}\sigma_{kl}\tau_2,\end{gathered}$$

где τ есть единичный касательный вектор, s_{ijkl} – тензор модулей упругости. Полагая, что осуществляется и поддерживается такое напряжённо-деформированное состояние, что только $\sigma_{22}\neq 0$, преобразуется к виду

$$N=\frac{1}{4}\sigma_{22}^2s_{2222}\frac{2tg\pi}{1+tg^2\beta},$$

где β – угол касательной к трещине с осью OX. Выразим $f_1,\ f_2$через N

$$f_1=\frac{\partial N\sqrt{1+y'^2}}{\partial x},\ f_2=\frac{\partial N\sqrt{1+y'^2}}{\partial y}. \tag{13}$$

В зависимости от вида функции *s2222(x,y)* будем иметь различные варианты распространения трещины. Рассмотрим модель композита, для которого

$$f^0_{2,y}=-\omega^2,\ f^0_{2,y^2}\equiv 0,\ f^0_{2,y^3}=-\alpha\omega^2,\ f_1=0. \tag{14}$$

Это соответствует представлению $\ln Q(x,\,y)$ в виде

$$\ln Q(x,\,y)=\ln Q(\,y)+v(x,\,y),\ \ln Q(\,y)=-\omega^2y^2-\alpha\omega^2y^4. \tag{15}$$

При $f_1=0$ отсутствует непрерывное изменение неоднородности в направлении нормали к линии распространения трещины. Будем полагать, что вдоль оси OX свойства среды кусочно-постоянные (распространение трещины перпендикулярно границе слоев), тогда

$$v(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta(x-nX),\ f_1=\varepsilon\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nX),\ =\frac{2\pi}{\Omega}, \tag{16}$$

где θ – функция Хевисайда. Полагая, что $\Omega\langle\langle\omega,\ \varepsilon\langle\langle 1$, получаем, что между точками $x{=}\ nX$ $(n=-\infty...\infty)$ отклонение трещины y от оси x удовлетворяет уравнению типа Дуффинга [3]

$$\ddot{y} = \omega^2(1+\alpha y^2)y = 0.$$

Тогда во всех точках оси x уравнение Дуффинга имеет вид

$$\ddot{y} + \omega^2(1+\alpha y_1^2)y_1 = \varepsilon\omega\sum\delta(x-kX). \tag{17}$$

С точностью до членов порядка α решение уравнения (13) запишем в виде [2]

$$y = A\cos\left[(\omega+\Delta\omega)x+\varphi\right], \Delta\omega = \frac{3}{8}\alpha A^2\omega. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (38), для A и φ получим уравнения, которые запишем в конечных разностях в виде $\varphi_{n+1} = \{\varphi_n + K_n \sin 2\varphi_n\}$, $A_{n+1} = A(1+\frac{1}{2}\varepsilon\sin 2\varphi_n)$, $K_n = \varepsilon\Delta\omega_n T = \frac{3}{8}\alpha A_n^2\varepsilon\frac{\omega}{\Omega}$.

Выводим обычным образом корреляционную функцию R_m для φ_n:

$$R_m = \frac{\int_0^1(\varphi_{n+m}-\langle\varphi_{n+m}\rangle)(\varphi_n-\langle\varphi_n\rangle)d\varphi_n}{\int_0^1(\varphi_n-\langle\varphi_n\rangle)^2 d\varphi_n}. \tag{19}$$

С помощью корреляционной функции R_m находится условие стохастизации траектории трещины

$$\lim_{m\to\infty} R_m = 0\,. \tag{20}$$

При $K \gg 1$ можно получить оценку

$$R_1 \approx \frac{1}{K_1}. \tag{21}$$

Следовательно, условие стохастизации траектории трещины сводится к условию расцепления фаз [2], т. е. фазы ведут себя некоррелированным хаотическим образом и для изучения поведения трещины необходимо переходить к вероятностному описанию. Условие (16) с учетом (21) запишем в виде

$$K_1 = \varepsilon\frac{\Delta\omega}{\Omega}\rangle\rangle 1. \tag{22}$$

Оценка длины траектории, начиная с которой поведение трещины становится стохастическим, имеет вид

$$\mathrm{x}_* = \frac{X}{2\ln K_1} = \frac{1}{2\Omega\ln K_1}. \tag{23}$$

Для больших K вероятность попадания траектории в фазовой плоскости в область устойчивости мала, а в случае попадания время пребывания в ней фазовой точки уменьшается.

Таким образом, имеем: при $K\langle 1 \quad (\varepsilon\langle\langle 1)$ распространение трещины устойчиво относительно *y=0,* при $K \gg 1$ распространение стохастично, при $K \approx 1$ – переходная область.

2. Стохастизация линий скольжения в неоднородной пластической среде.

Рассмотрим плоско-деформированное состояние для модели жестко-пластического неоднородного тела. В этом случае условие пластичности запишется в виде [10]

$$\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(x,\ y), \tag{24}$$

где *k(x,y)* – функция *x, y*.

Как известно, условие пластичности (24) удовлетворяется тождественно, если

$$\sigma_x = \sigma - k(x,y)\sin 2\theta, \sigma_y = \sigma + k(x,y)\cos 2\theta,\ \sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\tau_{xy} = k(x,y)\cos 2\theta, \tag{25}$$

где σ_1 и σ_2 – главные напряжения, θ— угол между осью x и α – линей скольжения, вторая линия скольжения – β.

Подставляя (25) в уравнения равновесия, получаем систему уравнений для σ и θ [8]

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k(x,\,y)\left(\cos 2\theta\tfrac{\partial\theta}{\partial x} + \sin 2\theta\tfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) - \tfrac{\partial k}{\partial x}\sin 2\theta + \tfrac{\partial k}{\partial y}\cos 2\theta = 0, \\ &\tfrac{\partial\sigma}{\partial y} + 2k(x,\,y)\left(-2\sin\theta\tfrac{\partial\theta}{\partial x} + \cos 2\theta\tfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) - \tfrac{\partial k}{\partial x}\cos 2\theta + \tfrac{\partial k}{\partial y}\sin 2\theta = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Система (26) нелинейная гиперболическая, её характеристики ортогональны и совпадают с линиями скольжения. В случае k=*const* получаем систему для однородной среды, которая обращением переменных приводится к линейной системе. Система (5) никакой заменой переменных к линейной системе не приводится, что эквивалентно тому, что уравнения характеристик (линий скольжения)

$$d\sigma - 2kd\theta - \frac{\partial k}{\partial x}dy + \frac{\partial k}{\partial y}dx = 0, \tag{27}$$

$dy = tg\theta dx$ вдоль α-линий,

$$d\sigma - 2kd\theta - \frac{\partial k}{\partial x}dy - \frac{\partial k}{\partial y}dx = 0, \tag{28}$$

$dy = -ctg\theta dx$ вдоль β-линий,
не имеют интегрируемых комбинаций.

Для однородной среды $k = const = k_0$ из (28) следует:

$$d\sigma_0 - 2k_0 d\theta_0 = 0dy_0 = tg\theta dx \tag{29}$$

вдоль α_0-линий,

$$d\sigma_0 + 2k_0 d\theta_0 dy_0 = -ctg\theta_0 dx \tag{30}$$

вдоль β_0-линий,

Как известно, линии скольжения — это линии движения дислокаций, причем дислокационная структура в процессе нагружения проходит несколько стадий самоорганизации. Стадия сформированной сетки линий скольжения (29), (30), определяемой из уравнений идеальной пластичности однородной среды, соответствует состоянию высокой организации структуры среды. Неоднородность $\kappa = \kappa(x,y)$ в уравнениях (24), (25), (26) играет роль возмущений, вносимых в эту упорядоченность пластического течения.

Рассмотрим условия на $\kappa(x,y)$, при которых уравнения (27), (28) описывают стохастизацию линий скольжения. Из уравнений (29), (30) видно, что в однородном случае на изменение угла θ влияет σ, поэтому в случае уравнений (27), (28) на θ влияют σ и κ. Для того, чтобы выявить только влияние неоднородности, будем считать, что нагружение ведется таким образом, что $\sigma = \sigma_0$, тогда изменение θ и y в зависимости от неоднородности описывается уравнениями

$$-d\theta_1 + \frac{k_1}{k_0}d\theta + \frac{1}{2k_0}\frac{\partial k_1}{\partial x}dy_0 - \frac{1}{2k_0}\frac{\partial k_1}{\partial y}dx = 0,\ dy_1 = (tg\theta_0)'\theta_1 dx \tag{31}$$

вдоль α-линий,

$$d\theta_1 + \frac{k_1}{k_0}d\theta_0 + \frac{1}{2k_0}\frac{\partial k_1}{\partial x}dy_0 - \frac{1}{2k_0}\frac{\partial k_1}{\partial y}dx = 0,\ dy_1 = -(ctg\theta_0)'\theta_1 dx \tag{32}$$

вдоль β-линий (32).

Записывая уравнения (31), (32) в конечных разностях, получим

$$\left|\frac{d\theta_1^{(n+1)}}{d\theta_1^{(n)}} - 1\right| = \left|\frac{2k_1^{(n+1)}d\theta_0 - k_{1,x}^{(n+1)}dy_0 - k_{1,y}^{(n+1)}}{k_1^{(n)}d\theta_0 - k_{1,x}^{(n)}dy_0 - k_{1,y}^{(n)}} - 1\right|\rangle\rangle 1 \tag{33}$$

для α и β линий.

Рассмотрим полуплоскость $y \geq 0$, при $y = 0$ заданы граничные условия [8]

$$\sigma_y = -P_0,\ \tau_{xy} = \tau_0 \tag{34}$$

Предел пластичности зависит только от y, т. е. $k = k(y)$. Предполагаем, что $|\tau_0| < k(0)$. В этом случае для системы (28) имеем задачу Коши, решение которой имеет вид [10]

$$\sigma_y = -p_0, \tau_{xy} = -\tau_0,\ \sigma_x = -p_0 \pm \sqrt{k^2(y) - \tau_0^2}. \tag{35}$$

Линии скольжения из уравнений (26) , (27) определяются соотношениями [10]

$$x - \mu \int_0^y \frac{k(y)+\tau_0}{k(y)-\tau_0} dy = const, x + \mu \int_0^y \sqrt{\frac{k(y)-\tau_0}{k(y)+\tau_0}} dy = const. \tag{36}$$

При $\tau_0 = 0$ линии скольжения — прямые, наклоненные к границе под углом $\pm\pi/4$. При монотонном возрастании *k(y)* кривые (36) приближаются к прямолинейным асимптотам, а при убывании необходимо потребовать, чтобы внутри области $y{>}0$ $|\tau 0|{<}$ $kmin$, где $kmin$ - наименьшее значение предела текучести в теле.

Пусть $\tau_0 = 0,\ k = k_0 + k_1(x, y)$, тогда $d\theta_0 = 0,\ dy_0 = tg\theta_0$ и условие (33) имеет вид

$$\left|k_{1,x^2} dy_0 - k_{1,y^2}\right\rangle |k_{1,x} dy_0 - k_{1,y}| \,. \tag{37}$$

На основе (37) получим более грубую оценку

$$|k_{1,x}| + |k_{1,y}| \geq \left|k_{1,x^2}\right| + \left|k_{1,y^2}\right| . \tag{38}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Кунин, И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой / И. А. Кунин. – М. : Наука, 1975. – 416 с.

[2] *Заславский, Г. М.* Введение в нелинейную физику / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М. : Наука, 1988. – 366 с.

[3] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.

[4] *Бабич, В. М.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. – М. : Наука, 1972. – 456 с.

[5] *Булдырев, В. С.* Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде / В. С. Булдырев // Проблемы математической физики. – Ленинград [СПб.], 1968. – Вып. 3. – С. 5–30.

[6] *Палянов, В. С.* Распространение в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В. С. Палянов, А. В. Чигарев // ПММ. – 2010. – Т. 74. Вып. 2. – С. 276–283.

[7] *Рытов, С. М.* Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский. – М. : Наука, 1978. – 463 с.

[8] *Чигарев, А. В.* Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А. В. Чигарев. – Минск : Технопринт, 2000. – 425 с.

[9] *Партон, В. З.* Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1974. – 416 с.

[10] *Кузнецов, А. И.* Плоская деформация неоднородных пластических тел / А. И. Кузнецов // Вестник Ленинградского университета. – 1958. – № 13. Вып. 3. – С. 112–131.

A. V. Chigarev, Yu. V. Chigarev, S. A. Pronkevich

NONLINEAR DYNAMICS OF ENERGY CURRENT LINES IN THE MECHANICS OF NON-UNIFORM ENVIRONMENTS

Belarussian National Technical University

Belarussian State Agrarian Technical University

Abstract. The representation of energy current lines in the non-uniform elastic environment and the influence of heterogeneity on stability or instability of energy distribution are conidered in the article. The influence of material heterogeneity of a body on modes of spreanding cracks in it discussed.
Keywords: non-uniform environment, deformation, plasticity, current lines, energy, the differential equations.

Чигарев Анатолий Власович

доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск

`e-mail:` theormech@rambler.ru

Чигарев Юрий Власович

доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный аграрный технический университет, г. Минск

`e-mail:` theormech@rambler.ru

Пронкевич Сергей Александрович

ассистент, Белорусский национальный технический университет, г. Минск

`e-mail:` ps_minsk@tut.by

Chigarev, Anatoliy Vlasovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Belarussian National Technical University, Minsk

Chigarev, Yuri Vlasovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Belarussian State Agrarian Technical University, Minsk

Pronkevich, Sergey Aleksandrovich

Assistant, Belarussian National Technical University, Minsk