УДК 530.12

Т. А. ЖУР, И. Т. НЕМАНОВА, А. П. РЯБУШКО

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИЦЫ В СРЕДЕ

1. Постановка задачи. В предыдущей работе авторов [1] выведена в постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО) система дифференциальных уравнений (см. [1], (2.7)), описывающая поступательное движение вращающейся частицы массой m в гравитационном поле, создаваемом гравитирующим центром массой M, окруженным центрально-симметрическим газопылевым облаком радиусом R с постоянной плотностью ρ. Движение частицы происходит внутри облака.

Целью настоящей работы является интегрирование этой системы уравнений ([1], (2.7)) с последующим подробным обсуждением свойств полученных решений.

При интегрировании этой системы, которая имеет вид

$$\ddot{\tilde{x}}^i - \left(\frac{\gamma M}{\tilde{r}}\right)_{,\tilde{x}^i} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho\tilde{x}^i = f^i, \tag{1.1}$$

где $f^i = \frac{1}{c^2}\Big[\frac{4\gamma M}{r^3}x^j u^j u^i + \frac{16}{3}\pi\gamma\rho x^j u^j u^i + 4\gamma^2 M^2\frac{1}{r^4}x^i - \frac{22}{3}\pi\gamma^2\rho M\frac{1}{r}x^i + 4\pi\gamma\rho M\frac{1}{R}x^i + 10\pi\gamma^2 M\rho\times$ $\times\frac{R^2}{r^3}x^i - \frac{\gamma M}{r^3}x^i u^s u^s - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho x^i u^s u^s - \frac{KS^{ji}}{m}\frac{D}{dS}(u^j_{,\beta}u^\beta) - \frac{\gamma S^{12}}{m}\left(\frac{M}{r^3} - \frac{8}{3}\pi\rho\right)\delta_{i\bar{k}}u^{\bar{k}}\Big]$, будем иметь в виду, что размеры центрального тела значительно меньше R и в пределах солнечной системы $\rho \sim 10^{-20}$ г $\cdot$ см$^{-3}$, а для диффузных и планетарных туманностей, глобул, которые могут иметь размеры $\sim (10^{16} - 10^{24})$ см, $\rho \sim (10^{-18} - 10^{-24})$ г $\cdot$ см$^{-3}$ (см. [2, 3]). Это дает основание при интегрировании учитывать только члены со степенью малого параметра ρ не выше чем в первой, кроме того, с целью упрощения вычислений ограничимся членами с эксцентриситетом e эллиптической орбиты не выше чем во второй степени $(0 < e < 1)$.

2. Интегрирование уравнений движения (1.1). Прежде всего проинтегрируем систему ньютоновских уравнений поступательного движения

$$\ddot{x}^i - \left(\frac{\gamma M}{r}\right)_{,x^i} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho x^i = 0, \quad r \leqslant R. \tag{2.1}$$

Действуем по известной схеме (см., например, [4], §23). Переходим к полярным координатам r, φ в плоскости $x^1 0 x^2$ $(x^3 = 0)$, считая движение происходящим в этой плоскости. С помощью трех уравнений (2.1) конструируем интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\gamma M}{r} + \frac{2}{3}\pi\gamma\rho r^2 = E, \quad E = \mathrm{const}, \tag{2.2}$$

а затем три интеграла площадей $M_i = \mathrm{const}$, являющиеся координатами вектора $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} = \mathrm{const}$ (векторное произведение векторов $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$) :

$$M_1 \equiv x^2\dot{x}^3 - \dot{x}^2 x^3 = C_1 = 0,\ M_2 \equiv x^3\dot{x}^1 - \dot{x}^3 x^1 = C_2 = 0,\ M_3 \equiv x^1\dot{x}^2 - \dot{x}^1 x^2 = C_3 = r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}. \tag{2.3}$$

Получение условий $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ показывает, что в ньютоновском приближении движение вращающейся частицы в среде остается плоским (движение происходит в плоскости $x^3 = 0$).

С помощью найденных интегралов (2.2), (2.3) путем перехода от переменной t к переменной φ и введения функции $u=\dfrac{1}{r}$ опять же по известной схеме (см. [4], §22, 23) получим уравнение для орбиты вращающейся частицы в среде в ньютоновской механике (a, p — большая полуось и параметр эллиптической орбиты в пустоте соответственно):

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2}{p}u+\frac{1}{ap}+\frac{4\pi\rho}{3Mp}\frac{1}{u^2}=0.$$

Оно эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u-\frac{1}{p}-\frac{4\pi\rho}{3Mpu^3}=0, \tag{2.4}$$

которое решено в предположении малости ρ и учете e в степени не выше второй (см. [5]):

$$u=\frac{1+e\cos\varphi}{p}-\frac{2\pi\rho p^2e}{M}\varphi\sin\varphi+\frac{4\pi\rho p^2}{3M}+\frac{4}{M}\pi\rho p^2e^2-\frac{4}{3M}\pi\rho p^2e^2\cos 2\varphi. \tag{2.5}$$

В ПНП ОТО, желая проинтегрировать релятивистские уравнения (1.1), по схеме ньютоновского приближения конструируем релятивистский интеграл энергии

$$\tilde{E}=\frac{1}{2}(\dot{\tilde{r}}^2+\tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}}^2)-\frac{\gamma M}{\tilde{r}}+\frac{2}{3}\pi\gamma\rho\tilde{r}^2=E+\int\dot{x}^if^idt, \tag{2.6}$$

где

$$\int\dot{x}^if^idt=\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{3\gamma^2M^2}{a}-10\pi\gamma^2\rho MR^2\right)\frac{1}{r}-5\gamma^2M^2\frac{1}{r^2}-\frac{10}{3}\pi\gamma^2\rho Mr-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2}{a}\pi\gamma^2\rho M-2\pi\gamma^2\rho M\frac{1}{R}\right)r^2+\frac{2}{a}\pi\gamma^2\rho MR^2+\frac{KS^{12}\gamma MM_3}{m}\frac{1}{r^3}\right],$$

и три релятивистских интеграла площадей ($x^3=0,\ \dot{x}^3=0$):

$$\tilde{M}_1\equiv x^2\dot{\tilde{x}}^3-\dot{x}^2\tilde{x}^3=\int(x^2f^3-x^3f^2)dt=\int x^2f^3dt, \tag{2.7}$$

$$\tilde{M}_2\equiv\tilde{x}^3\dot{x}^1-\dot{\tilde{x}}^3x^1=\int(x^3f^1-x^1f^3)dt=-\int x^1f^3dt, \tag{2.8}$$

$$\tilde{M}_3\equiv\tilde{x}^1\dot{\tilde{x}}^2-\dot{\tilde{x}}^1\tilde{x}^2=C_3+\int(x^1f^2-x^2f^1)dt, \tag{2.9}$$

где

$$\int x^2f^3dt=\frac{1}{c^2}\gamma(1-K)\varphi\left\{2\pi\rho p^2e\left[\sigma^{13}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi-4e\sin^2\varphi-2e\sin^4\varphi+\cos\varphi+\frac{1}{4}e\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sigma^{23}\left(\sin^3\varphi+\frac{1}{4}e\sin 4\varphi-\frac{1}{2}e\varphi\right)\right]+\sigma^{13}\left(\frac{M}{2p}+\frac{4}{3}\pi\rho p^2\right)\right\},$$

$$-\int x^1f^3dt=-\frac{1}{c^2}\gamma(1-K)\varphi\left\{2\pi\rho p^2e\left[\sigma^{13}\left(\frac{1}{3}\sin^3\varphi-2\sin\varphi-\frac{3}{2}e\varphi-2e\sin 2\varphi-\frac{1}{4}e\sin 4\varphi\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sigma^{23}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi-4e\sin^2\varphi+2e\sin^4\varphi-\frac{11}{4}e\right)\right]-\sigma^{23}\left(\frac{M}{2p}+\frac{4}{3}\pi\rho p^2\right)\right\},$$

$$\int(x^1f^2-x^2f^1)dt=\frac{1}{c^2}\left[A_1e\left(\frac{1}{p}\cos\varphi-\frac{2}{M}\pi\rho p^2\left(\varphi\sin\varphi+\frac{2}{3}e\cos 2\varphi\right)\right)+\right.$$
$$\left.+A_2p^2e(-2\cos\varphi+3e\cos^2\varphi-4e^2\cos^3\varphi)\right],$$

$$A_1=-4\gamma MM_3+\gamma M(2K-1)\sigma^{12},\qquad A_2=\frac{8}{3}\pi\gamma\rho M_3+\frac{2}{3}\pi\gamma\rho(K-2)\sigma^{12}.$$

Как и раньше, тильда над буквой означает, что величина берется в ПНП ОТО. Тензор спина $\underset{3}{S}^{ij} = \mathrm{const}$, $\underset{3}{S}^{ij} = m\sigma^{ij}$, σ^{ij} — удельный угловой момент.

С помощью интегралов (2.6) — (2.9) аналогичным путем приходим к дифференциальному уравнению релятивистской орбиты ($\tilde{u} = 1/\tilde{r}$)

$$\left(\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\varphi}}\right)^2 + \tilde{u}^2 - \frac{2}{\tilde{p}}\tilde{u} + \frac{4\pi\rho}{3M\tilde{p}\tilde{u}^2} + \frac{1}{\tilde{a}\tilde{p}} = -\frac{2}{c^2M^2}\left[(-4\gamma M M_3 + \sigma^{12}(2K-1)\gamma M)\frac{1}{r} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{8}{3}\pi\gamma\rho M_3 + \frac{2}{3}\sigma^{12}(K-2)\pi\gamma\rho\right)r^2\right]\left(\frac{2}{pr} - \frac{1}{ap} - \frac{4\pi\rho}{3Mp}r^2\right) + \frac{2}{M_3^2}\int \dot{x}^i f^i\,dt,$$

решение которого в ПНП ОТО с точностью до первых степеней малого параметра ρ и e имеет вид

$$\tilde{u} = u + \frac{1}{c^2}\left\{-\frac{2\gamma M}{p^2} - \frac{\gamma M}{ap} - \frac{10}{p}\pi\gamma\rho R^2 - \frac{4}{R}\pi\gamma\rho p^2 + 22\pi\gamma\rho p + \frac{2\gamma\sigma^{12}}{M_3}\left(\frac{M}{p^2} - 2\pi\rho p\right) + \frac{\gamma M\sigma^{12}}{apM_3}(K-1) + \right.$$
$$+ \left[\frac{3}{p^2}\gamma Me + \frac{6}{R}\pi\gamma\rho p^2 e - 20\pi\gamma\rho pe - \frac{\sigma^{12}\gamma Me}{p^2M_3}(K-2) + \frac{2}{3M_3}\sigma^{12}\pi\gamma\rho pe(11K+14)\right]\varphi\sin\varphi +$$
$$\left. + \left[6\pi\gamma\rho pe - \frac{2}{M_3}\sigma^{12}\pi\gamma\rho pe(K-2)\right]\varphi^2\cos\varphi\right\}. \tag{2.11}$$

3. Обсуждение результатов. I. Обсудим особенности ньютоновского поступательного движения вращающейся частицы в среде. Из (2.5) прежде всего следует, что собственное вращение частицы не влияет на ее поступательное движение, но есть отклонения от ньютоновского поступательного движения в пустоте, которое происходит по неподвижно ориентированной в пространстве эллиптической орбите. Чтобы охарактеризовать особенности этих отклонений, преобразуем выражение (2.5) к виду

$$u = \frac{1 + e_\rho\cos[(1+\alpha_\rho^{\text{н}})\varphi]}{p_\rho}, \tag{3.1}$$

где

$$e_\rho = e\left[1 - \frac{4\pi\rho p^3}{3M}(1 + 2e\cos\varphi)\right], \tag{3.2}$$

$$\alpha_\rho^{\text{н}} = \frac{2\pi\rho p^3}{M}, \tag{3.3}$$

$$p_\rho = p\left[1 - \frac{4\pi\rho p^3}{3M}(1 + 4e^2)\right]. \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.1) — (3.4) следует, что ньютоновскую орбиту в среде (3.1) можно интерпретировать (с точностью до учета членов с ρ и e^2) как поворачивающийся и пульсирующий в своей плоскости эллипс. Поворот (смещение перигелия) происходит в сторону, противоположную направлению движения по орбите на угол $\Delta\varphi_\rho^{\text{н}} = 2\pi\alpha_\rho^{\text{н}}$ за один оборот. Пульсации происходят с периодом 2π, так как в силу (3.2) эксцентриситет e_ρ зависит от $\cos\varphi$, а благодаря связи $a_\rho = p_\rho(1 + e_\rho^2)$, где a_ρ — большая полуось эллипса, происходят колебания a_ρ, амплитуда Δa_ρ которых определяется, как нетрудно показать, выражением

$$\Delta a_\rho = \frac{16\pi\rho p^4 e}{3M}. \tag{3.5}$$

Можно сделать численные оценки этих эффектов. В Солнечной системе для Меркурия $\Delta a_\rho^{M} \sim 10^{18}\rho$ см, для Земли $\Delta a_\rho^{З} \sim 10^{20}\rho$ см, для Плутона $\Delta a_\rho^{П} \sim 10^{26}\rho$ см. Из этих оценок видно, что порядок Δa_ρ пропорционален ρ. Если принять $\rho \sim (10^{-18} - 10^{-20})$г $\cdot$ см$^{-3}$, то амплитуда колебаний полуоси a_ρ наибольшая у Плутона: $\Delta a_\rho^{П} \sim (10^8 - 10^6)$ см. Эффект смещения перигелия $\Delta\varphi_\rho^{\text{н}}$ также легко оценивается. В линейных единицах порядок смещения за один оборот тот же, что и для Δa_ρ, но смещение перигелия — эффект вековой, нарастающий с каждым оборотом.

II. Приступая к обсуждению релятивистского поступательного движения вращающейся частицы в среде, прежде всего рассмотрим интегралы (2.7), (2.8). Из их вида следует, что если $\sigma^{13} \neq 0$, $\sigma^{23} \neq 0$ и $K \neq 1$, то $\tilde{M}_1 \neq 0$, $\tilde{M}_2 \neq 0$ и движение в ПНП ОТО перестает быть плоским. Это означает, что если $x^3 = 0$, то $\tilde{x}^3 \neq 0$, которое можно вычислить, пользуясь (2.7), (2.8). Оставляя только вековые члены, находим

$$\tilde{x}^3 = (\tilde{M}_1 x^1 + M_2 x^2) : (-C_3) = \frac{(1-K)\gamma}{c^2 M_3}\left\{\sigma^{13}\left[\frac{1}{3}\pi\rho p^3 e(5\sin^4\varphi - 2\cos^4\varphi) - \frac{1}{2}M\cos\varphi + \right.\right.$$
$$\left. + e\left(\frac{1}{2}M - \frac{8}{3}\pi\rho p^3\right)\cos^2\varphi - 4\pi\rho p^3 e\sin^2\varphi(1+\cos^2\varphi)\right] + \sigma^{23}\left(\frac{1}{2}M + \frac{2}{3}\pi\rho p^3\right)\sin\varphi(e\cos\varphi - 1) +$$
$$\left. + \pi\rho p^3 e\varphi\sin\varphi(\sigma^{13}\cos\varphi + \sigma^{23}\sin\varphi)\right\}\varphi. \tag{3.6}$$

Если $\sigma^{13} = 0$, $\sigma^{23} = 0$ или $K = 1$, то движение становится плоским.

III. Орбитальное движение (2.11) можно представить в следующем более удобном для исследования виде:

$$\tilde{u} = \frac{1 + \tilde{e}\cos[(1+\alpha)\varphi]}{p}, \quad \alpha = \alpha^{\text{н}}_\rho - \alpha_0 + \alpha_\rho + \alpha_\sigma + \alpha_{\rho\sigma}, \tag{3.7}$$

где

$$\alpha^{\text{н}}_\rho = \frac{2\pi\rho p^3}{M}, \quad \alpha_0 = \frac{3\gamma M}{c^2 p}, \quad \alpha_\rho = \frac{2\pi\rho\gamma p^2}{c^2}\left(10 - \frac{3p}{R}\right), \quad \alpha_\sigma = \frac{\gamma M\sigma^{12}}{c^2 p M_3}(K-2),$$
$$\alpha_{\rho\sigma} = -\frac{2\pi\rho\gamma p^2\sigma^{12}}{3c^2 M_3}(11K + 14), \quad \tilde{e} = e\left(1 + \frac{6}{c^2}\pi\rho\gamma p^2\varphi^2 + \frac{2\pi\rho p^2\sigma^{12}}{c^2 M_3}(2-K)\varphi^2\right). \tag{3.8}$$

Одновременно с возможным отклонением эллиптической орбиты от плоскости $x^3 = 0$ происходит также, как показывает (3.7), смещение ее периастра (перигелия) и вековое изменение размеров орбиты. За один ньютоновский период эллипс поворачивается на угол

$$\Delta\varphi = -2\pi(\alpha^{\text{н}}_\rho - \alpha_0 + \alpha_\rho + \alpha_\sigma + \alpha_{\rho\sigma}) = -2\pi\alpha^{\text{н}}_\rho + 2\pi\alpha_0 - 2\pi\alpha_\rho - 2\pi\alpha_\sigma - 2\pi\alpha_{\rho\sigma}. \tag{3.9}$$

Ньютоновская величина $\Delta\varphi^{\text{н}}_\rho = -2\pi\alpha^{\text{н}}_\rho$ дает, как уже указывалось, поворот орбиты (смещение периастра) в сторону, противоположную направлению движения по орбите (обратное смещение), в то время как знаменитое релятивистское смещение перигелия Меркурия $\Delta\varphi_0 = 2\pi\alpha_0$ происходит в направлении движения Меркурия по орбите (прямое смещение). Смещение, обязанное гравитационному полю среды, $\Delta\varphi_\rho = -2\pi\alpha_\rho$ также является обратным. Величина $\Delta\varphi_\sigma = 2\pi\alpha_\sigma$ приводит к добавочному смещению, которое может быть прямым и обратным в зависимости от значений компоненты спина σ^{12} и K. И, наконец, смещение $\Delta\varphi_{\rho\sigma} = 2\pi\alpha_{\rho\sigma}$ обязано одновременному учету двух факторов — действию гравитационного поля среды и наличию собственного вращения частицы $\sigma^{\alpha\beta}$. Суммарный поворот орбиты $\Delta\varphi$, согласно формуле (3.9), может быть легко оценен для конкретных тел и среды (см. п. 3).

Отметим, что, как показывают дополнительные исследования (см. [6 – 8]), учет спина частицы (собственного вращения малого тела) практически не влияет на величину лобового сопротивления движению, которое ничтожно мало при указанных плотностях ρ. Определяющим является влияние гравитационного поля системы: центральное тело — газопылевое облако.

IV. Выражение для $\tilde{e}$ показывает (см. (3.8)), что эксцентриситет эллиптической орбиты в ПНП ОТО меняется вековым образом (члены с φ^2). С течением времени (ростом φ) $\tilde{e}$ увеличивается, что приводит к увеличению большой полуоси эллиптической вращающейся орбиты, так как с точностью до вековых членов и членов с e в степени не выше второй имеем для релятивистской полуоси $\tilde{a}$:

$$\tilde{a} = a + \tilde{a}_\rho + \tilde{a}_{\rho\sigma}, \tag{3.10}$$

где $\tilde{a}_\rho = \dfrac{12}{c^2}\pi\gamma\rho p^3 e^2 \varphi^2$, $\tilde{a}_{\rho\sigma} = \dfrac{4\pi\gamma\rho p^3 e^2}{c^2 M_3}\sigma^{12}(2-K)\varphi^2$. Добавка $\tilde{a}_\rho$ к ньютоновской полуоси a обязана гравитационному полю среды, а добавка $\tilde{a}_{\rho\sigma}$ — полю среды и спину частицы.

В пределах Солнечной системы вековой эффект изменения большой полуоси $\tilde{a}$ мал. Например, для Плутона за один оборот $\tilde{a}_\rho \sim 10^{18}\rho$ см, а так как $\rho \sim (10^{-18} - 10^{-20})$ г · см$^{-3}$, то $\tilde{a}_\rho \sim (1 - 10^{-2})$ см. Но в обширных и плотных планетарных и диффузных туманностях, для которых ρ значительно больше и p можно брать значительно большим, чем для Плутона, эффект может быть на много порядков выше.

Summary

Relativistic equations of translational movement of a particle in a medium are integrated. Numeric estimates for some peculiarities of the movement such as pulsations, slow rotation of the elliptic orbit, secular extension of its large semiaxis, deviation from the planar movement are obtained.

Литература

1. Жур Т. А., Неманова И. Т., Рябушко А. П. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 68 – 70.
2. Фесенков В. Г. Солнце и солнечная система. Избр. тр. М., 1976.
3. Радзиевский В. В. // Малая Энциклопедия "Физика космоса". М., 1976. С. 61 – 80.
4. Рябушко А. П. Движение тел в ОТО. Мн., 1979.
5. Рябушко А. П., Неманова И. Т. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 9. С. 806 – 809.
6. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М. Теория полета неуправляемых ракет. М., 1959.
7. Дмитриевский А. А. Внешняя баллистика. М., 1979.
8. Неманова И. Т. Релятивистское движение тел в среде: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1987.

Белорусский аграрный технический университет

Поступила в редакцию 24.01.97