

## Литература

1. Антонишин Ю. Т. Пластическая деформация чугуна. Минск, 1991.
2. Захарченко Э. В., Билько А. П., Кирьян В. И., Шамановский С. В. // Структура и свойства чугуна: Сб. научн. тр. АН УССР. Киев, 1989. С. 77—82.
3. Чугун: Справочник / Под ред. А. Д. Шермана и А. А. Жукова. М., 1991.
4. Вишняков Я. Д., Пискарев В. Д. Управление остаточными напряжениями в металлах и сплавах. М., 1989.

Физико-технический институт  
АН Беларуси

Поступила в редакцию  
09.03.92

УДК 539.4

Ю. В. ЧИГАРЕВ

### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ ПЛАСТИЧНОСТИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

В работах [1, 2] построены решения по определению эффективных пределов пластичности для идеально-пластических сред. Так, в [1] для случая матричной статистической однородной структуры композита с изотропными компонентами эффективный предел пластичности определяется в пренебрежении флуктуациями диссипативной функции. В [2] эффективный предел пластичности строится на основе метода условных моментов в пренебрежении флуктуациями скоростей деформации в пределах компонента, что позволяет сохранить нелинейность ассоциированного течения.

В рассматриваемой работе в рамках теории трансляционного упрочнения [3] построено решение по определению эффективных пластических свойств упруговязкопластического тела, механическая модель которого представлена на рис. 1.

Пусть механические свойства упругости  $G$  (модуль сдвига), пластичности  $k$ , вязкости  $\eta$ , упрочнения  $s$  меняются от точки к точке тела непрерывно или дискретно. Предполагается, что изменение этих свойств имеет случайный характер, что свойственно большинству реальных материалов и обуславливается рядом технологических и естественных факторов (композиты, грунты, поликристаллы и т. д.).

При нагружении тело деформируется, причем в силу того, что различные компоненты имеют разные пределы текучести, в нем будут возникать локальные зоны, где появляется пластическое течение, в то время как в других зонах частицы среды находятся в упругом состоянии [3—5].

Считаем, что тело ведет себя упругим образом в точках, в которых выполняется условие

$$S_{ij}S_{ij} < k^2, \quad (1)$$

где

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad (2)$$

$\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $S_{ij}$  — девиатор напряжений;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

В точках среды, где

$$S_{ij}S_{ij} \geq k^2, \quad (3)$$

среда деформируется пластическим образом, причем в этом случае полные деформации  $e_{ij}$  представляются в виде:

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad (4)$$

где  $e_{ij}^p$  — пластические деформации;  $e_{ij}^e$  — упругие деформации, связанные с напряжениями обобщенным законом Гука,

$$\sigma_{ij} = 2G \left( e_{ij}^e + \frac{\nu}{1+2\nu} e_{kk}^e \delta_{ij} \right). \quad (5)$$

В шестимерном пространстве напряжений упругая и пластическая

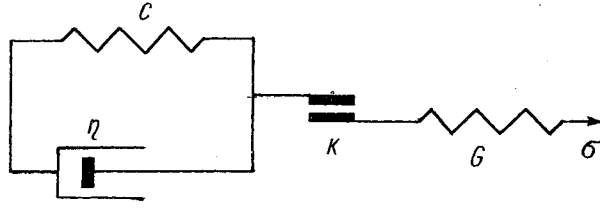


Рис. 1. Механическая одномерная модель упруговязкопластического упрочняющегося тела

области будут разделяться некоторой поверхностью нагружения, общий вид которой [3] следующий:

$$f(S_{ij}, e_{ij}^p, \eta, k, G, c) = 0. \quad (6)$$

Скорости пластических деформаций для рассматриваемой модели равны нулю  $\dot{e}_{ij}^p = 0$ , если

$$(S_{ij} - ce_{ij}^p)(S_{ij} - ce_{ij}^p) < k^2. \quad (7)$$

В случае функции нагружения [4]

$$(S_{ij} - ce_{ij}^p - \eta e_{ij}^p)(S_{ij} - ce_{ij}^p - \eta e_{ij}^p) = k^2 \quad (8)$$

скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом течения [4]

$$\dot{e}_{ij}^p = \psi(S_{ij} - ce_{ij}^p - \eta e_{ij}^p), \quad (9)$$

где

$$\psi = \frac{2}{k} \sqrt{\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p}.$$

Соотношение (9) с учетом (8) и (2) можно также записать в виде

$$\sigma_{ij} = \dot{e}_{ij}^p \left( \frac{1 + \psi\eta}{\psi} \right) + ce_{ij}^p + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}. \quad (10)$$

В силу представления всех величин в виде математического ожидания и флуктуации уравнения (10) разобьем на две системы — осредненную и флуктуационную. Осредненную систему запишем таким образом:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= 2[\langle \lambda \rangle \langle \dot{e}_{ij}^p \rangle + \langle \lambda' \dot{e}_{ij}^p \rangle] + \langle c \rangle \langle e_{ij}^p \rangle + \\ &+ \langle c' e_{ij}^p \rangle + \frac{1}{3} \langle \sigma_{kk} \rangle \delta_{ij}; \quad \lambda = (1 + \eta\psi)/\psi. \end{aligned} \quad (11)$$

Флуктуационная система имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= 2[\langle \dot{e}_{ij}^p \rangle \lambda' + \langle \lambda \rangle \dot{e}'_{ij}] + \langle c \rangle e'_{ij} + \\ &+ c'' \langle e_{ij}^p \rangle + \frac{1}{3} \sigma'_{kk} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (12)$$

В уравнениях (11) и (12) угловые скобки обозначают математическое ожидание, штрих—флуктуации.

Полные деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (13)$$

При пластическом течении, если пренебречь разгрузкой,  $e'_{ij} = 0$ , из (13) следуют системы уравнений

$$\langle \dot{e}'_{ij} \rangle = \frac{1}{2} (\langle v_{i,j} \rangle + \langle v_{j,i} \rangle), \quad (14)$$

$$\dot{e}'_{ij} = \frac{1}{2} (v'_{i,j} + v'_{j,i}), \quad (15)$$

где

$$v_{i,j} = \frac{du_{i,j}}{dt} + \frac{du_{j,i}}{dt}.$$

Подставим (14) и (15) в (11), получим

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle = & 2 \left[ \langle \lambda \rangle \frac{1}{2} (\langle v_{i,j} \rangle + \langle v_{j,i} \rangle) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \langle \mathcal{N} (v'_{i,j} + v'_{j,i}) \rangle \right] + \frac{1}{3} \langle \sigma_{kk} \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle c \rangle (\langle u_{i,j} \rangle + \langle u_{j,i} \rangle) + \frac{1}{2} \langle c' (u'_{i,j} + u'_{j,i}) \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

После подстановки (14) и (15) в (12) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} = & \mathcal{N} (\langle v_{i,j} \rangle + \langle v_{j,i} \rangle) + \\ & + \langle \mathcal{N} \rangle (v'_{i,j} + v'_{j,i}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma'_{kk} + \\ & + \langle c \rangle (u'_{i,j} + u'_{j,i}) \frac{1}{2} + c' (\langle u_{i,j} \rangle + \langle u_{j,i} \rangle) \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения равновесия выберем в виде [4]

$$[\sigma_{jk} (\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} = 0, \quad (18)$$

тогда осредненные уравнения равновесия запишутся так:

$$[\langle \sigma_{jk} \rangle (\delta_{ik} + \langle u_{i,k} \rangle)]_{,j} + \langle \sigma'_{jk} u_{i,k} \rangle_{,j} = 0. \quad (19)$$

Уравнения равновесия для случайных флуктуаций имеют вид

$$\sigma'_{i,j} + [\langle \sigma_{jk} \rangle u'_{i,k}]_{,j} + [\sigma'_{jk} \langle u_{i,k} \rangle]_{,j} = 0. \quad (20)$$

Рассмотрим двухкомпонентный композит стохастической структуры, в компонентах которого  $\langle c \rangle = 0$ ;  $c' = 0$ .

Подставим (17) в (20) и проведем статическую линеаризацию уравнений с последующим применением метода функций Грина аналогично [2]. Получим определенную относительно компонентов скоростей деформаций алгебраическую систему уравнений, которую запишем таким образом:

$$\langle \dot{e}_{ij}^{pm} \rangle = \langle \dot{e}_{ij}^p \rangle + G_{ijkn} (x_k^{(1)} - x_k^{(2)}) \times \quad (21)$$

$$\times \sum_{r=1}^2 \varphi(r^{(2)}/m^{(1)}) \left[ \frac{1}{3} \langle \sigma_{ee}^r \rangle \delta_{kn} + 2(\lambda_r - \langle \lambda \rangle) \langle \dot{e}_{kn}^{pr} \rangle \right].$$

Здесь  $m = 1, 2$ ;  $\varphi(r^{(2)}/m^{(1)})$  — вероятность того, что  $r$ -компонент тела находится в точках  $x_k^{(2)}$  при условии, что  $m$ -компонент — в точке  $x_k^{(1)}$ ,

$$\lambda_m = \frac{1}{2} \frac{k_m}{V \langle \dot{e}_{ij}^{pm} \rangle \langle \dot{e}_{ij}^p \rangle}, \quad \langle \lambda \rangle = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \quad (22)$$

( $\alpha_1, \alpha_2$  — объемные концентрации компонентов). Уравнение (21) получено при условии, что пластическое течение имеет место одновременно в обоих компонентах композита. Если  $k_2, k_1$  — пределы текучести матрицы и включений соответственно, то условие пластического течения композита будет выполняться, когда  $k_2 > k_1$ .

Соотношение (21) определяет зависимость между средними скоростями деформаций по компонентам и по макрообъему. Если функция  $\varphi(r^{(2)}/m^{(1)})$  зависит лишь от расстояния между точками  $x_k^{(1)}$  и  $x_k^{(2)}$ , то, согласно [2], функция Грина приводится в виде

$$G_{ijk\epsilon}(0) = \frac{1}{150 \langle \lambda \rangle} [10\delta_{ij}\delta_{k\epsilon} - 15(\delta_{ik}\delta_{j\epsilon} + \delta_{i\epsilon}\delta_{jk})]. \quad (23)$$

Подставив (23) в (21), после ряда преобразований получим выражения, связывающие скорости пластических деформаций компонентов со скоростью течения композита:

$$\langle \dot{e}_{ij}^{p1} \rangle = \frac{2\lambda_2 + 3 \langle \lambda \rangle}{2(\alpha_2 \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2) + 3 \langle \lambda \rangle} \langle \dot{e}_{ij}^p \rangle, \quad (24)$$

$$\langle \dot{e}_{ij}^{p2} \rangle = \frac{2\lambda_1 + 3 \langle \lambda \rangle}{2(\alpha_2 \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2) + 3 \langle \lambda \rangle} \langle \dot{e}_{ij}^p \rangle.$$

Ассоциированный закон течения среднего напряженного и деформированного состояния получим с учетом (2), (10), (22) и (24) в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{k^* \langle \dot{e}_{ij}^p \rangle}{V \langle \dot{e}_{\alpha\beta}^p \rangle \langle \dot{e}_{\alpha\beta}^p \rangle} + \frac{1}{3} \langle \sigma_{kk} \rangle \delta_{ij}, \quad (25)$$

где

$$k^* = \frac{ab + 6 \langle \lambda \rangle^2 E^2}{\alpha_2 a + \alpha_1 b + 3 \langle \lambda \rangle E}, \quad (26)$$

$$a = k_1 + 2\eta_1 E;$$

$$b = k_2 + 2\eta_2 E;$$

$$E = V \sqrt{\langle \dot{e}_{ke}^p \rangle \langle \dot{e}_{ke}^p \rangle},$$

$k^*$  — эффективный предел пластичности.

Таким образом, в случае композита со структурно-неоднородными упруговязкопластическими свойствами эффективный предел пластичности определяется уравнением (25). Рассмотрим влияние вязких свойств отдельных компонентов на величину  $k^*$ . Из рис. 2 следует, что увеличение вязких свойств в матрице ( $\eta_2$ ) и во включениях ( $\eta_1$ ) ведет к росту эффективных пределов пластичности. При этом на пластическое дефор-

мирование композита более существенное влияние оказывают вязкие свойства матрицы.

Пластическое течение композита начинается при достижении предела пластичности матрицы. Очевидно, что он будет зависеть от объема матрицы, занимаемой в рассматриваемом макрообъеме. Следовательно, и эффективный предел пластичности будет зависеть от объема концентраций  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . На рис. 3 показана зависимость эффективного предела пластичности от объема концентрации включений. В случае  $k_1 > k_2$  уве-

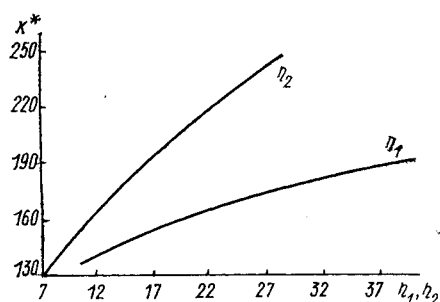


Рис. 2. Влияние вязких свойств компонентов композита на величину эффективного предела пластичности

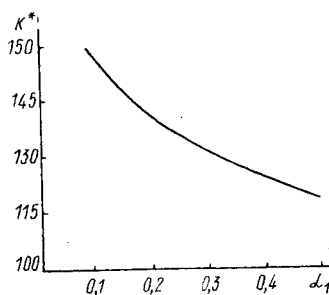


Рис. 3. Изменение эффективного предела пластичности от величины концентрации включений

личение объема концентрации включений ведет к понижению эффективного модуля пластичности. Кривые на рис. 2 получены при  $\dot{\epsilon}^p = 5$  м/с,  $k_1 = 20$  МПа,  $k_2 = 10$  МПа,  $\alpha_1 = 0,3$ ,  $\alpha_2 = 0,7$ . Кривая на рис. 3 соответствует  $\dot{\epsilon}^p = 5$  м/с,  $k_1 = 20$  МПа,  $k_2 = 10$  МПа,  $\eta_1 = 15$  МПа,  $\eta_2 = 7$  МПа.

### Summary

The coefficient of plastidity in relatively composite medium is also determined.

### Литература

1. Сараев А. А. // Прикл. механика. 1981. № 3. С. 164—167.
2. Хорошун Л. П., Ведало Ю. А. // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 1. С. 86—90.
3. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., 1971.
4. Спорыхин А. Н., Чигарев Ю. В. // Прикл. механика. 1977. Т. 13, № 3. С. 24—32.
5. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М., 1977.

Белорусский аграрный технический университет

Поступила в редакцию  
04.12.91

УДК 678.742+539.104

В. А. БОРИСЕВИЧ, В. П. ЯКИМЦОВ, В. А. НИКОЛАЕВ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАДИАЦИОННОГО ОКИСЛЕНИЯ ПОЛИЭТИЛЕНОВОЙ ПЛЕНКИ НА ВОЗДУХЕ

Радиационно-химическая модификация полиэтилена сопровождается выделением газообразных продуктов реакции, основным из которых (98%) является водород [1, 2]. Характер и степень радиационно-химических превращений полиэтилена существенно изменяются, если в облучаемый материал проникает кислород [3, 4].