3. Пи Клауди. Культура ананасов. Гавана, 1968 (на испанском языке).

4. Национальная Группа специалистов. Изучение системы машины культуры ананасов в условиях Кубы. — В кн.: Механизация культуры ананасов. Гавана, 1972 (на испанском языке).

В. А. СКОТНИКОВ,
доктор техн. наук;
Ю. В. ЧИГАРЕВ,
канд. физ.-мат. наук

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕСА И ГРУНТА

В последнее время заметно расширились исследования перекатывания тел. Были рассмотрены различные задачи, в которых учитывалась и геометрия поверхностей и разнообразие контактирующих тел. Однако аналитическое исследование контакта колесного движителя и грунта на основе точных соотношений математической теории упругости и тем более сложной реологии чрезвычайно сложно.

Обычно в основе теоретических построений грунта лежит представление о модели, состоящей из системы отдельных пружин, сжатие которых возрастает прямо пропорционально приложенной нагрузке, а также учитывающей влияние скорости нагружения на зависимость между усилием и деформацией. Такая реологическая модель составляется из набора элементов Гука и Ньютона и соответствует телу Кельвина-Фойгта. На основе данной модели деформируемости грунта интересные результаты были получены И. И. Водянником, В. И. Виноградовым, Ю. С. Леоновым и другими авторами.

В реальных процессах взаимодействия колесного движителя и грунта деформирование можно с определенной степенью точности описывать с помощью гармонических или близким к гармоническому законам. Это позволяет к исследованию деформирования грунта применить результаты некоторых работ по амплитудно-зависимому внутреннему трению.

Так, Н. Н. Давиденковым [1] на основе проведенных экспериментальных работ была выдвинута гипотеза, в соответствии с которой внутреннее трение при значительных напряжениях представляет эффект микропластических деформаций и должно изучаться с использованием уравнений теории пластичности Мизеса-Генки.

В настоящей работе в качестве описания деформируемости грунта предлагается реологическая модель, построен-

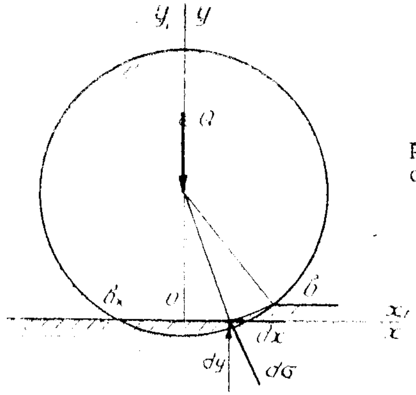

Рис. 1. Равномерное движение колеса по горизонтальной поверхности грунта.

ная на теории микропластичности — теории упруго-пластичного материала Ишлинского [2]. Под микропластическими деформациями будем понимать такие пластические деформации, которые имеют место при любом уровне напряжений, в том числе и при напряжениях, меньших макроскопического предела текучести материала.

Рассмотрим равномерное движение колеса по горизонтальной поверхности грунта (рис. 1). Пусть Q — вертикальная нагрузка, действующая на ось колеса, которое движется со скоростью $V_к = const$. Вращение колеса происходит с постоянной угловой скоростью ω_1. Воспользуемся подвижной $o_1x_1y_1$ и неподвижной oxy системами координат. Вследствие взаимных деформаций тела будут соприкасаться по некоторой линии, называемой линией контакта. Ось ox_1 направим вдоль линии контакта, а ось oy_1 — через ось колеса, ось ox — вдоль оси ox_1, а ось oy — параллельно оси oy. Положим, что линии контакта соответствует участок $(-b \leqslant x_1 \leqslant b)$ оси ox. Связь между координатами x и x_1 одной и той же точки в области контакта представим в виде $x_1 = x + V_к t$, где t — время.

Установим некоторые свойства деформируемости грунта и колеса при одноосном нагружении. Представим реологическую модель грунта из параллельно работающих элементов Прендтля (рис. 2). Полную деформацию произвольного плеча i представим в виде суммы упругой деформации e_i^e и пластической e_i^p. Упругая деформация грунта, например торфа, зависит от его ботанического состава, степени разложения и влажности.

Пластическая деформация связана с необратимыми сдвигами твердых частиц. В зависимости от величины и времени действия нагрузки, а также от ботанического состава, степени разложения и влажности грунта тот или иной вид деформации имеет первостепенное значение [3]. Опыты по вдавливанию штампов показывают, что даже при небольших нагрузках грунтам присущи как упругие, так и остаточные дефор-

Рис. 2. Реологическая модель грунта из параллельно работающих элементов Прендтля.

мации. При этом полные деформации могут быть представлены в виде [3]

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\Pi}{4}\,\frac{pD}{c}, \tag{1}$$

где p — вертикальное давление;

D — длина линии контакта;

c — коэффициент постели

$$c = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2};$$

E_0 — модуль общей деформации грунта;

μ_0 — коэффициент бокового расширения грунта.

Связь между девиатором напряжений S_i и упругой деформацией в i-м плече имеет вид

$$S_i = 2G_i\,(\varepsilon_i - \varepsilon_i^p), \tag{2}$$

где G_i — модуль сдвига.

Обозначим через τ_{si} — предел текучести в i-м плече, тогда отношение $\tau_{si}/2G_i = k_i$ определит безразмерный предел текучести i-го плеча.

Считаем упругие характеристики всех плеч одинаковыми, а пределы текучести разными, непрерывно распределенными с плотностью вероятности $r(k)$. Тогда закон деформирования произвольного плеча в зоне контакта имеет вид [4]

$$\begin{cases} d\sigma = (\varepsilon - \varepsilon^p)\,E dk \\ E(\varepsilon - \varepsilon^p)\,dk = Ek dk \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^p, \end{cases} \tag{3}$$

где $d\sigma$ — напряжение в произвольном плече.

Физический смысл функции $\operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^p$ заключается в том, что она равна $+1$ при $\dot{\varepsilon}^p > 0$ и равна -1 при $\dot{\varepsilon}^p < 0$.

Рассмотрим процесс нагружения, который соответствует участку $[0, b]$ зоны контакта колесного движителя и грунта (рис. 1).

Усилия во всех плечах в зоне контакта $(0 \leq x \leq b)$ в соответствии с вероятностью $r(k)$ встретить то или иное k определим аналогично [4], получим

$$\sigma = E\varepsilon - E\int_0^b \varepsilon^p r(k)\,dk. \tag{4}$$

Пластические деформации в плечах рассматриваемой модели определяются из второго уравнения (3)

$$k \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^c. \qquad (5)$$

Будем считать, что осадка поверхности грунта в окрестностях зоны контакта равна нулю, т. е. $e^p = e^c = 0$. На линии контакта $0 \leqslant x \leqslant b$ будет $\varepsilon > 0$, $\dot{\varepsilon} > 0$. В этом случае функция $\operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^p = 1$, и из уравнения (4) с учетом (5) имеем

$$\sigma = E\varepsilon - E\int_0^b (\varepsilon - k)\, r(k)\, dk. \qquad (6)$$

Формула (6) выражает связь между напряжениями и деформациями в любой точке участка [0, b] линии контакта. Аналогично [4] выведем условия для определения пластической деформации. Пусть ε_0 представляет собой полную деформацию грунта плеча k в некоторой точке линии контакта. Тогда пластические деформации в зоне нагружения для данного плеча будут

$$\varepsilon^p_{ок} = 0, \text{ если } k > \varepsilon_0;$$

$$\varepsilon^p_{ок} = \varepsilon_0 - k, \text{ если } k < \varepsilon_0.$$

Рассмотрим процесс разгрузки, который соответствует участку [—b, 0] зоны контакта колеса и грунта. Пластические деформации в плечах определим аналогично [4]

$$\varepsilon_{kp} = \begin{cases} \varepsilon_0 + k - \varepsilon_*, & 0 < k < \dfrac{\varepsilon_*}{2} \\ \varepsilon_0 - k, & \dfrac{\varepsilon_*}{2} < k < \varepsilon_0 \\ 0, & k > \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_* = \varepsilon_0 - \varepsilon) \end{cases} \qquad (7)$$

Из уравнения (4) с учетом (7) получим уравнение кривой разгрузки

$$\sigma = E\varepsilon - E\int_0^{\varepsilon_*/2} (k - \varepsilon_* + \varepsilon_0)\, r(k)\, dk - E\int_{\varepsilon_*/2}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - k)\, r(k)\, dk. \qquad (8)$$

Рассмотрим процесс взаимодействия колеса с грунтом в зоне нагружения. В качестве функции распределения пределов текучести F(k) выберем функцию в виде [5]

$$F(k) = Hk^{\alpha}, \qquad (9)$$

где H и α — некоторые постоянные больше нуля.

Тогда пределы текучести в плечах будут распределены с плотностью вероятности следующим образом:

$$r(k) = H\alpha k^{\alpha - 1}. \qquad (10)$$

Подставляя (9) в (5), получим реологическое выражение, описывающее связь между напряжениями и деформациями грунта в зоне нагружения

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \frac{H}{\alpha + 1}\varepsilon^{\alpha+1}\right). \qquad (11)$$

В случае, если механические свойства колеса описываются упругой моделью, основное уравнение взаимодействия имеет вид

$$E_1\varepsilon_1 = E\left(\varepsilon - \frac{H}{\alpha + 1}\varepsilon^{\alpha+1}\right). \qquad (12)$$

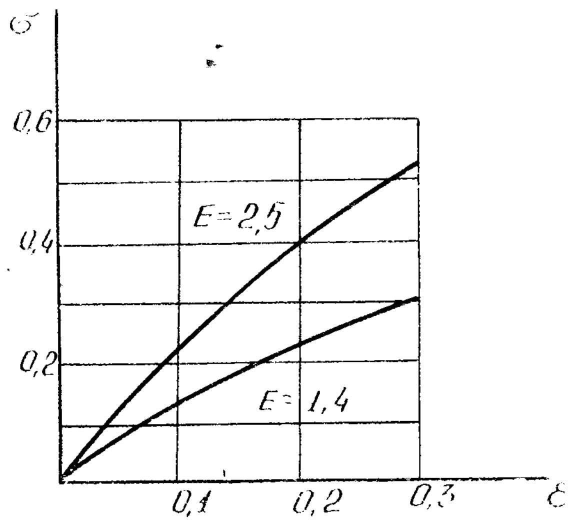

Рис. 3. Зависимость «$\sigma - \varepsilon$» тростниково-осокового торфа на линии контакта при различных значениях модуля полной деформации грунта.

Деформацию грунта можно приближенно описывать гармоническим законом

$$\varepsilon = A\cos\Omega t. \qquad (13)$$

Здесь A и Ω — амплитуда и частота деформирования грунта. Тогда на линии контакта в зоне нагружения имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{E}{E_1}\left[A\cos\Omega t - \frac{H}{\alpha + 1}(A\cos\Omega t)^{\alpha+1}\right]. \qquad (14)$$

Формулы (11), (13) позволяют определить различные физические характеристики деформирования колеса и грунта.

Апробация реологических соотношений (11), (12), (14)

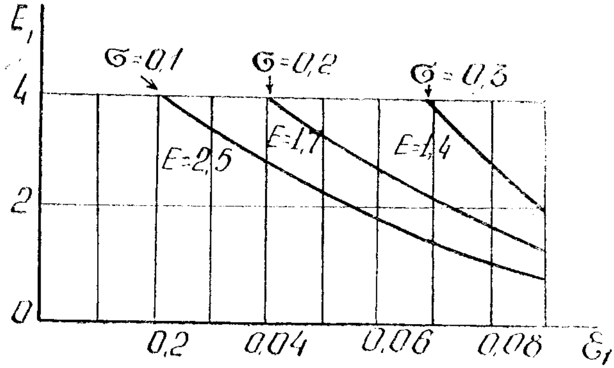

Рис. 4. Зависимость между деформациями и модулями упругости колеса.

была проведена для торфяных грунтов [3]. На рис. 3 показана зависимость «σ—ε» тростниково-осокового торфа на линии контакта в зоне нагружения при различных значениях модуля полной деформации грунта. Деформации, соответствующие значениям 0,3, являются максимальными радиальными деформациями грунта при взаимодействии с колесом. В зависимости от изменения модуля полной деформации грунта E напряжения на участке принимают различные значения. При постоянных значениях напряжений на линии контакта в зоне нагружения наблюдается увеличение деформаций с уменьшением модуля Юнга (рис. 4).

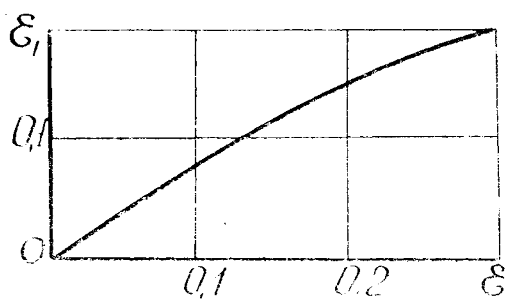

Рис. 5. Зависимость между деформациями колеса и торфяного грунта в зоне нагрузки.

Существует зависимость между деформациями колеса и торфяного грунта в зоне нагрузки (рис. 5). Значение $\varepsilon=0,3$ соответствует максимальной радиальной деформации, а $\varepsilon=0$ соответствует деформации в точке b, т. е. точке начала контакта колеса с грунтом. При движении по линии контакта от точки b к точке о наблюдаем монотонный рост деформаций грунта и колеса, причем деформации грунта растут быстрее Кривая была построена для значений $E=1,4$; $E_1=1,5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыденков Н. Н. О рассеянии энергии при вибрациях, ЖТФ, т. 8, № 6, 1938.

2. Ишлинский А. Ю. Некоторые применения статистики к описанию законов деформирования тел. Известия АН СССР, ОТН, № 9, 1944.

3. Скотников В. А., Теркин А. Е. Основы теории проходимости гусеничных мелиоративных тракторов. Мн., «Вышэйшая школа», 1973.

4. Пальмов В. А. Колебания упруго-пластических тел. М., «Наука», 1976.

5. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. Госстройиздат, 1965.