$$A1=4(x_2-x01)^2+8(x_2-x01)(y_2-y01)k1+4(y_2-y01)^2k1^2-4A^2-4k1^2A^2$$

$$A=\sqrt{(x_2-x01)^2+(y_2-y01)^2}+2r$$

$$B1=4C((x_2-x01)+(y_2-y01)k1)$$

$$C=A^2-(x_2-x01)^2-(y_2-y01)^2$$

$$D1=\sqrt{B_1^{\,2}-4A1C1}$$

Выбор единственного решения $x02_1, y02_1$ или $x02_2, y02_2$ осуществляется при условии большего значения y02, i=1,2.

По данному расчетному методу составлена программа для расчета и воспроизведения кривых при заданных углах наклона касательных.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Карасин В.З.*** и др. Контурная обработка деталей низа обуви. -М.: Легкая и пищевая промышленность. 1982г., -234 с.
2. ***Завьялов Ю.С.*** Сплайн-функции - универсальный математический аппарат для представления и обработки геометрической информации в машиностроении. "Вычислительные системы". Вып 68, 1976 г.
3. ***Трутченко Л.И., Скоков П.И., Жевнерова О.Г.*** Проектирование криволинейных участков контуров деталей одежды при задании условий. Сб. "Состояние и перспективы использования ЭВМ на предприятиях легкой пр-сти" 1990.

S U M M A R Y

The mathematical method of the description curvilinear of sites of details of sewing products, footwear and other objects is considered on the basis of the theory spline of partially constant curvature. The method provides both description of gauge curves, and construction of new contours. The method can be used and is realized in CAD system.

УДК 539.3 : 534.1

И.В. Авдошка, Г.И. Михасев

Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений пологих оболочек, описывающих движение тонкой упругой цилиндрической оболочки с учетом воздействия внешних сил. Оболочка (в общем случае) является некруговой, а ее края - необязательно плоские кривые. Предполагается, что внешние плавно меняющиеся силы вызывают безмоментное нестационарное напряженное состояние оболочки, характеризующееся начальными усилиями T_1^0, T_2^0, S^0, действующими в срединной поверхности оболочки.

Пусть s, φ - продольная и окружная координаты на срединной поверхности, отнесенные к характерному размеру R оболочки, так что

$$s_1(\varphi) \le s \le s_2(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,$$

а радиус кривизны $R_2 = R / k(\varphi)$.

В предположении о большой изменяемости волн в направлении координаты φ, используем систему уравнений [1-3], записанную в безразмерном виде

$$\varepsilon^4 \Delta^2 W - k(\varphi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(T_2 \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(T_3 \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(T_3 \frac{\partial W}{\partial s}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial s}\left(T_1 \frac{\partial W}{\partial s}\right)\right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi + k(\varphi) \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0, \tag{1}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12R^2\left(1-\nu^2\right)}, \quad t = \frac{t_*}{T_*}, \quad W = \varepsilon^4 \frac{W_*}{R}, \quad \Phi = \frac{\varepsilon^{-4}\Phi_*}{hE},$$

$$T_*^2 = \varepsilon^{-6} \frac{R^2 \rho}{E}, \quad \left(T_1^0, T_2^0, S^0\right) = -Eh\varepsilon^6 \left(T_1, T_2, T_3\right),$$

где h — толщина оболочки, ρ - плотность материала, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, ε - малый параметр, T_* - характерное время, t_* - время, W_*, Φ_* - нормальный прогиб и функция напряжений.

Рассмотрим здесь случай, когда T_i не зависят от s. Пусть $s_i(\varphi)$, $k(\varphi)$, $T_i(\varphi) \in C^\infty[\varphi_1, \varphi_2]$, причем при дифференцировании по φ функции существенно не возрастают.

На краях $s = s_i(\varphi)$ рассмотрим условия шарнирного опирания. Для исследования основного напряженного состояния будем удовлетворять главным граничным условиям, которые с точностью до ε^2 имеют вид [1]

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = s_i(\varphi). \tag{2}$$

Пусть

$$W\big|_{t=0} = W_0^*(s, \varphi, \varepsilon) F_0, \quad \dot{W}\big|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} V_0^*(s, \varphi, \varepsilon) F_0, \tag{3}$$

$$F_0 = F_0(\varphi, \varepsilon) = \exp\left\{ i\varepsilon^{-1}\left(a_0 \varphi + \frac{1}{2} b_0 \varphi^2 \right)\right\},$$

где $\operatorname{Im} b_0 > 0$, $a_0 (a_0 \ne 0)$ - вещественное число, W_0^*, V_0^* — комплекснозначные функции, о которых будет сказано ниже.

Частный случай задачи (1)-(3), когда $T_i \equiv 0$, рассмотрен в работах [4,5].

Обозначим через $z_n(s, \varphi)$, $n = 1, 2, \ldots$ бесконечную систему собственных функций краевой задачи

$$\partial^4 z / \partial s^4 - \lambda z = 0, \quad z = \partial^2 z / \partial s^2 = 0, \tag{4}$$

а через $\lambda_n(\varphi)$ — соответствующую им систему собственных чисел, параметрически зависящих от φ.

Пусть W_0^*, V_0^* удовлетворяют (2). Тогда [6]

$$W_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} W_{n0}(\varphi,\varepsilon) z_n(s,\varphi), \quad W_{n0} = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} W_0^* z_n ds,$$

$$V_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0}(\varphi,\varepsilon) z_n(s,\varphi), \quad V_{n0} = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} V_0^* z_n ds. \tag{5}$$

Далее полагаем, что

$$W_{no} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}^0(\zeta), \; V_{no} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} v_{nm}^0(\zeta), \; \zeta = \varepsilon^{-1/2}\varphi, \tag{6}$$

где w_{nm}^0, v_{nm}^0 - полиномы степеней M_{nm} с комплексными (в общем случае) коэффициентами.

Следуя [5], решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$W = \sum_{n=1}^{N} W_n, \quad \Phi = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n. \tag{7}$$

Пару функций W_n, Φ_n будем называть n-ым волновым пакетом (ВП) с центром на образующей $\varphi = q_n(t)$, где $q_n(t) \in C^\infty(0,+\infty)$, $q_n(0)=0$.

С учетом (5),(6), получим

$$W_n\big|_{t=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}{}^0 z_n F_0, \quad \dot{W}_n\big|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}{}^0 z_n F_0. \tag{8}$$

Пусть $\varphi = q_n(t) + \varepsilon^{1/2}\xi_n$. Решение в окрестности линии $\varphi = q_n(t)$ будем искать в виде [5]

$$W_n = W_n^* F_n, \; \Phi_n = \Phi_n^* F_n, \tag{9}$$

$$W_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}(s,\xi_n,t), \quad \Phi_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} f_{nm}(s,\xi_n,t),$$

$$F_n = \exp\left\{ i \left[\varepsilon^{-1} \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau + \varepsilon^{-1/2} p_n(t)\xi_n + \tfrac{1}{2} b_n(t) \xi_n^2 \right] \right\},$$

где ω_n, p_n, $b_n \in C^\infty(0,+\infty)$, $\operatorname{Im} b_n(t) > 0$ для любого $t \geq 0$, а w_{nm}, f_{nm} — полиномы по ξ_n.

В системе уравнений (1) разложим функции $k(\varphi)$ и $T_i(s,\varphi,t)$ в ряды Тейлора по переменной φ в окрестности точки $q_n(t)$. Эти разложения имеют вид

$$k(\varphi) = k(q_n) + \varepsilon^{1/2} k'(q_n)\xi_n + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{1} k''(q_n)\xi_n^2 + \ldots,$$

$$T_i(s,\varphi,t) = T_i(s,q_n,t) + \varepsilon^{1/2} T_i'(s,q_n,t)\xi_n + \frac{1}{2}\varepsilon^{1} T_i''(q_n)\xi_n^2 + \ldots,$$

где штрих означает дифференцирование по переменной φ.

Подстановка анзатца (9) в (1), (2) с учетом последних разложений приводит к последовательности краевых задач относительно w_{nm}.

Процедура отыскания неизвестных функций q_n, ω_n, p_n, b_n, w_{nm}, f_{nm} подробно описана в статье [5]. Выпишем лишь систему Гамильтона

$$\dot q_n = H_p,\ \dot p_n = -H_q, \tag{10}$$

с начальными условиями $q_n(0)=0$, $p_n(0)=a_0$ для нахождения функций q_n, p_n. Здесь

$$H_n[p_n,q_n] = \sqrt{p_n^4 + \frac{\lambda_n(q_n)k^2(q_n)}{p_n^4} - T_2(q_n)p_n^2} \ — \tag{11}$$

функция Гамильтона, определяющая динамику ВП (9). Индексы p, q, ω здесь и ниже означают дифференцирование по соответствующей переменной.

При выводе функции (11) были существенно использованы оценки $T_i(\varphi)\sim O(1)$. Усилие T_1 появляется лишь в высших приближениях ($m\geq 4$). Влияние же усилия T_3 на динамику ВП сказывается при определении амплитуды w_{no}

$$w_{no} = P_{no}(\xi_n,t)\ z_n(s,q_n(t)), \tag{12}$$

где полином P_{no} находится из уравнения

$$a_{no}\frac{\partial^2 P_{no}}{\partial \xi_n^2} + a_{n1}\xi_n\frac{\partial P_{no}}{\partial \xi_n} + a_{n2}\frac{\partial P_{no}}{\partial t} + a_{n3}P_{no} = 0\,, \tag{13}$$

$$a_{no}(t) = \tfrac{1}{2}H_{pp},\ a_{n1}(t) = i(b_nH_{pp} + H_{pq}),\ a_{n2} = i,$$

$$a_{n3}(t) = i(2H_n\eta)^{-1}\Big[b_nH_{pp}H_n\eta - \dot\omega_n\eta - 2H_pH_q\eta -$$

$$-\frac{4kk'}{p_n^5}\lambda_n[q_n(t)]\eta - p_n\int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} T_2' z_n^2 ds + \ddot q_n p_n\eta -$$

$$-2p_n\int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} T_3\frac{\partial z_n}{\partial s}z_n ds + \int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)}(L_p z_q + L_\omega \dot z_n)z_n ds\Big],$$

$$\eta(t) = \int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} z_n^2 ds,\quad \dot z_n = \frac{\partial z_n}{\partial t}.$$

Здесь

$$L_{no} = \frac{k^2[q_n(t)]}{p_n^4(t)}\frac{\partial^4}{\partial s^4} + \{p_n^4 - T_2p_n^2 - [\omega_n(t) - \dot q_n(t)p_n(t)]^2\}.$$

Качественный анализ динамики ВП в случае, когда k, s_i переменны, рассмотрен в [4,5]. Пусть k, s_i постоянны ($k\equiv 1$), а $T_2=T_2(\varphi)$, $T_1\equiv T_3\equiv 0$. Постоянство s_i приводит к постоянству λ_n. Указанные предположения соответствуют случаю круговой оболочки с прямыми краями, подверженной стационарному неравномерно распределенному по окружности оболочки давлению.

Анализ решения представляет собой анализ системы Гамильтона (10), которая с учетом вида H_n имеет вид

$$\dot q_n = \frac{2p_n^8 - T_2(q_n)p_n^6 - 2\lambda_n}{p_n^5 H_n};\quad \dot p_n = \frac{T_2'(q_n)p_n^2}{2H_n}. \tag{14}$$

Здесь $q_n(t)$ — центр ВП, соответственно, $\dot q_n(t)$ — скорость ВП, $p_n(t)$ определяет изменяемость в направлении φ.

Легко показать, что при сделанных предположениях $H_n[p_n,q_n]\equiv H_n|_{t=0} = H_n^0$. Учитывая это,

$$\dot{q}_n = \frac{p_n^8 + H_n^{o2} p_n^4 - 3\lambda_n}{p_n^5 H_n^o}. \qquad (15)$$

Для монотонности (15) по p_n потребуем

$$15\lambda_n > \frac{H_n^{o4}}{12}. \qquad (16)$$

Таким образом, получим, что в случае постоянства знака $T_2'(q_n(t))$ на некотором отрезке времени (что означает монотонное возрастание или убывание кольцевого усилия T_2 в направлении движения ВП) $\dot{p}_n$ также будет иметь постоянный знак. Это, в свою очередь, обеспечит монотонное возрастание или убывание $\dot{q}_n$ в указанном промежутке времени.

В результате анализа получаем две качественные картины:

1) Если ВП движется в сторону возрастания усилия T_2, то он продолжает движение в этом направлении, причем с увеличивающейся скоростью.

2) Если движение ВП происходит в сторону убывания T_2, и

$$\inf T_2(\varphi) < A, \qquad (17)$$

$$A = \frac{H_n^{o4} + 4\lambda_n - H_n^{o2}\sqrt{H_n^{o4} + 12\lambda_n}}{\left(\frac{\sqrt{H_n^{o4} + 12\lambda_n} - H_n^{o2}}{2}\right)^{3/2}},$$

то в некоторый момент времени t_r произойдет отражение ВП от образующей $\varphi=\varphi_r$, которая находится из уравнения $T_2(\varphi_r)=A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Товстик П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек. — М.: Наука, 1995. -320 с.
2. ***Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.*** Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979. -384 с.
3. ***Болотин В.В.*** Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. - 573 с.
4. ***Михасев Г.И.*** О распространении изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке // Изв. РАН. МТТ, 1994, № 3. С. 164-172.
5. ***Михасев Г.И.*** Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // ПММ, 1996, т.60, вып.4. С.635-643.
6. ***Курант Р., Гильберт Д.*** Методы математической физики. — М.; Л.: Гостехиздат, 1951, т.1. - 476 с.

S U M M A R Y

An initial boundary value problem for the equations of semi-membrane theory of shells is considered. The shell is assumed to be non-circular and its edges may be not plane. The case when the shell is subjected to external forces is examined here. By using the complex WKB-method, the solution is found in the form of the travelling wave packets. In the particular case when external forces are functions of a circumferential coordinate, the qualitative analysis of the constructed solution is carried out.