УДК 511.42

МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ НУЛЕЙ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ТЕОРЕМЕ МИНКОВСКОГО О ЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ

И. М. Морозова
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный аграрный технический университет
О. Н. Кемеш
старший преподаватель
Белорусский государственный аграрный технический университет
Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работах Ю.В. Нестеренко, Н.В. Будариной, О'Доннелла были получены оценки о связи количества алгебраических чисел на интервале с зависимостью от величин значений целочисленного многочлена и его производной. В данной работе эти результаты обобщаются на кривые Шмидта – произвольные кривые на плоскости с ненулевой кривизной.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

В последние годы как в поле действительных, так и полях комплексных чисел и р-адических чисел появились задачи о количестве нулей функций

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + \cdots + a_1 f_1(x) + a_0, \qquad (1)$$

где $a_j \in \mathbb{Z}$, $f_j(x), 1 \le j \le n, (n+1)$-раз непрерывно дифференцируемые функции и вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \ne 0, \qquad (2)$$

для почти всех x (в смысле меры Лебега) из интервала $I = [a, b]$. В частности, при $f_j(x) = x^j$ функция $F_n(x)$ превращается в многочлен, а нули функции $F_n(x)$ – это алгебраические числа. Распределение алгебраических чисел имеет большое значение в теории трансцендентных чисел [1] и метрической теории диофантовых приближений [2]. В частности прогресс в задаче распределения алгебраических чисел сыграл основную роль в исследовании известной проблемы Малера и ее обобщений [3; 4; 5; 6]. Как это видно из списка литературы, большой вклад в изучение проблемы распределения алгебраических чисел внесли белорусские математики.

Для каждой точки $x \in I$ для натурального числа $Q > 1$ всегда можно найти числа a_j, $H = \max_{0 \le j \le n} |a_j| \le Q$, такие, что

$$|F_n(x)| < c_1 Q^{-n}. \qquad (3)$$

Величины $c_j, j = 1,2,\dots$ зависят только от Q. Неравенство (3) – следствие теоремы Минковского о линейных формах, доказанной Минковским в конце XIX в. [7]. Неравенство (3) тесно связано с расстоянием x до ближайшего нуля α_j функции $F_n(x)$. Если $F_n(x)$ многочлен, то $|x - \alpha_j|$ – это расстояние x до ближайшего алгебраического числа α_j корня $F_n(x)$. Однако одно неравенство (3) не позволяет получить точные оценки $|x - \alpha_j|$. Необходимо еще иметь оценки снизу для $|F_n'(x)|$.

К настоящему времени имеется несколько точных результатов связи меры Лебега и множества $B_1 \subset I$ решений системы неравенств:

$$|F_n'(x)| < c_0 Q^{-v_0} \qquad (4)$$

$$\delta_0 Q^{-v_1} < |F_n'(x)| < c_0 Q^{-v_1}, H \le Q, v_j \ge 0, v_0 + v_1 = n - 1.$$

В работе [8] проанализированы при дополнительных условиях на v_j более общее чем (4) неравенства, с условием на производные всех порядков. Отметим проблему Спринджука-Малера [2], решенную Клейбоком и Маргулисом [9], о том, что $\mu B_1 \underset{Q\to\infty}{\to} 0$.

В работе для случая $n = 2$ мы доказываем теорему о существовании δ_0, при котором $\mu B_1 > d\mu I$, $0 < d < 1$. Эта теорема полезна при получении оценок количества нулей функций $F_n(x)$.

Теорема. *Обозначим через* $M_2(I,Q)$ *множество* $x \in I$, *для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |F_2(x)| < Q^{-2}, \\ |F_2'(x)| < \delta_0 Q \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для функции $F_2(x)$. *Тогда существует* δ_1, *что при* $\delta_0 < \delta_1$ *справедливо неравенство*

$$\mu M_2(I,Q) < \frac{1}{4}\mu I.$$

Доказательство теоремы.

Разобьем доказательство на три этапа в зависимости от величины модуля производной $\left|F_2^{/}(x)\right|$ на интервале J. Обозначим через $L(I, Q)$ множество $x \in J$, для которых выполняется система неравенств $\begin{cases} \left|F_2(x)\right| < Q^{-2} \\ \left|F_2^{/}(x)\right| < cQ \end{cases}$, а через $L_1(I,Q)$ множество $x \in J$, для которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \left|F_2(x)\right| < Q^{-2} \\ Q^{5/8} < \left|F_2^{/}(x)\right| < \delta_0 Q \end{cases}. \tag{5}$$

Предложение 1. Справедливо неравенство

$$\mu L_1(I,Q) < 2^{-4}\mu J. \tag{6}$$

Доказательство. Будем считать, что система (5) рассматривается на интервале монотонности функций $F_2(x)$. Тогда множество $x \in J$, для которых верна система (5), содержится в интервале, который можно записать в виде

$$G(F) =: \left\{ x \in J : \left|x - \alpha_1(F)\right| < c_3 Q^{-2} \left|F^{/}(\beta_1)\right|^{-1} \right\}. \tag{7}$$

Наряду с интервалом $G(F)$ рассмотрим интервал $G_1(F)$

$$G_1(F) =: \left\{ x \in J : \left|x - \alpha_1(F)\right| < c_4 \left|F^{/}(\beta_1)\right|^{-1} \right\}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует неравенство

$$\mu G(F) < c_4 \cdot c_3^{-1} Q^{-2} \mu G_1(F). \tag{9}$$

Зафиксируем вектор $\vec{b} = (a_2, a_1)$, координаты которого являются коэффициентами $F_2(x)$. Интервалы $G_1(F)$, имеющие один и тот же вектор $\vec{b}$, объединим в класс $L_1(\vec{b})$. Покажем, что при подходящем выборе c_4 интервалы $G_1(F_1)$ и $G_1(F_2)$ не пересекаются.

Предположим противное, что: $S = G_1(F_1) \cap G_1(F_2) \neq 0$ и $x_0 \in S$.

Разложим функции $F_j(x), j = 1,2$ на интервалах $G_1(F_1)$ и $G_1(F_2)$ в ряд Тейлора и оценим значения $\left|F_j(x_0)\right|$. Имеем

$$\left|F_j(x_0)\right| \le \left|F_j(\alpha_1)\right| + \left|F_j^{/}(\alpha_1)(x_0 - \alpha_1)\right| + \left|F_j^{//}(\varsigma_j)(x_0 - \alpha_1)^2\right|, \text{ где } \varsigma_j \in (x_0, \alpha_1).$$

Следует заметить, что $\left|F_j(x_0)\right| \le 2c_4$ и

$$\begin{cases} R(x_0) = \overline{d} \in Z, d \neq 0 \\ R(x_0) = \left|F_2(x_0) - F_1(x_0)\right| < 4c_4 \end{cases} \tag{10}$$

Второе неравенство системы (10) при $c_4 = \frac{1}{5}$ противоречиво, что доказывает, что $G_1(F_1)$ и $G_1(F_2)$ не пересекаются. Отсюда следует, что

$$\sum_{F \in L_1(\vec{b})} \mu G_1(F) \le \mu J. \tag{11}$$

Воспользуемся неравенством (11). Тогда из (9) и (11) следует

$$\sum_{\vec{b}} \sum_{F \in L_1(\vec{b})} \mu G(F) < 4c_4^{-1}\delta_0 \mu J < 2^{-4} \mu J.$$

Предложение 2. Обозначим через $L_2(I,Q)$ множество $x \in J$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |F_2(x)| < Q^{-2} \\ |F_2'(x)| \le Q^{5/8} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение в функциях $F_2(x) \in L_2(I,Q)$. Тогда $\mu L_2(I,Q) < 2^{-4} \mu J$.

Доказательство. Введем при фиксированном $b = a_2$ класс функций с одним и тем же b, который обозначим $L(b)$. Определим интервалы

$$G_2(F) =: \left\{ x \in J : |x - \alpha_1(F)| < c_5 Q^{-1} \left| F'(\beta_1) \right|^{-1} \right\}. \tag{12}$$

Из определения $G(F)$ и $G_2(F)$ следует

$$\mu G(F) < c_5^{-1} Q^{-1} \mu G_2(F). \tag{13}$$

Интервал $G_2(F_1)$ будем называть существенным, если не существует интервала $G_2(F_2)$, $F_2 \in L(b)$, такого что

$$\mu G_2(F_1) \cap G_2(F_2) > \frac{1}{2} \mu G_2(F_1). \tag{14}$$

Если же такой интервал найдется, то есть, при некотором $F_2(x) \in L(b)$ выполняется неравенство

$$\mu G_2(F_1) \cap G_2(F_2) > \frac{1}{2} \mu G_2(F_1),$$

то интервал $G_2(F_1)$ будем называть несущественным. В случае существенных интервалов воспользуемся (13).

Тогда из $\sum_{F \in L(\vec{b})} \mu G_2(F) < 2\mu J$ и (13) получаем

$$\sum_{\vec{b}} \sum_{F \in L(\vec{b})} \mu G(F) < c_6 \mu J. \tag{15}$$

В случае несущественных интервалов разложим $F_2(x)$ и $F_2^{/}(x)$ на интервале $G_2(F)$ в ряд и оценим их модули сверху, пользуясь $\max\limits_{x\in J}\left|f_j(x)\right| < c$. Получим систему неравенств для линейного многочлена $R(x) = ax + b = F_2(x) - F_1(x)$:

$$\begin{cases} |ax+b| < cQ^{-1}, \\ |a| < 2Q^{5/8} \end{cases}.$$

Тогда

$$\left|x + \frac{b}{a}\right| < c_7 Q^{-1} a^{-1}. \qquad (16)$$

Неравенство (15) выполняется для интервала с центром в точке $\left(-\frac{b}{a}\right)$ длиной $2c_7Q^{-1}a^{-1}$.

Просуммируем эту величину по значениям *b*, количество которых не превосходит $a\mu J$, а затем по *a*, если $|a| < 2Q^{5/8}$. Получаем оценку $c_8 Q^{\frac{5}{8}-1}\mu I$, которая вместе с (15) завершает доказательство предложения 2, если в (15) выбрать $c_6 = 2^{-4}$.

Предложение 3. Обозначим через B_3 множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} |a_2 f(x) + a_1 x + a_0| < cQ^{-2} \\ |a_2 f^{/}(x) + a_1| < c_9 \end{cases}. \qquad (17)$$

Тогда $\mu B_3 < 2^{-4}\mu J$.

Для доказательства предложения 3 применим к системам (5) и (17) лемму.

Лемма. [10]. При условии $x \in (a,b)$ мера множества решений системы неравенств

$$\begin{cases} |F_n(x)| < \delta \\ \left|F^{/}(x)\right| < K, \quad H(F) \le Q \end{cases} \qquad (18)$$

не превышает $c_4(\delta, K, Q^{n-1})^{\frac{1}{(n+1)(2n-1)}}$.

При $\delta = c_9 Q^{-2}$. Получим $\mu B_3 < c_{10} Q^{-1/9}$, что меньше $2^{-4}\mu J$ и при достаточно большом *Q*. Из *предложений* 1–3 следует доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гельфонд, А. О.*** Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – Москва : Гостехиздат, 1952. – 224 с.
2. ***Sprindzuk, V.*** Achiements and problems of the theory of Diophantine approximations. / V. Sprindzuk // Uspekhi Mat. Nauk. – 1980. – Vo. 35, № 4(24). – P. 3–68.
3. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
4. ***Beresnevich, V., Bernik V.*** // On a metrical theorem of W. Schmidt. / V. Beresnevich, V. Bernik // Acta Arithmetica. – 1996. – Vo. 75. – P. 219–233.
5. ***Берник, В. И.*** О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – С. 17–28.
6. ***Beresnevich, V.*** Groshew type theorem for convergence on manifold / V. Beresnevich // Acta Arithmetica Hungar. – 2002. – T. 94. № 1-2. – C. 99–130.
7. ***Касселс, Дж. В. С.*** Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – Москва : Изд-во иностранной литературы, 1961. – 212 с.
8. ***Beresnevich, V. V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90, № 2. – P. 97–112.
9. ***Kleinbock, D. Y.*** Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.
10. ***Bernik V. I., Kleinbock D., Margulis G. A.*** // Khintchine-type theorems on manifokls the convergence case for standard and multiplicative versions, Internet. Marh. Res. Notices. – 2001. – P. 453–486.

Поступила в редакцию 06.04.2017 г.
Контакты: +375 29 663 31 89 (Морозова Инна Михайловна)

Morozova I., Kemesh O., Sakovich N. DETECTION METHOD OF ZEROS OF SMOOTH FUNCTION BASED ON MINKOWSKI'S THEOREM ON LINEAR FORMS.

In the research carried out by Y. V. Nesterenko, N. V. Budarina, O'Donnell the data on the relation of the quantity of algebraic number at the interval with the dependency on the value of a polynomial with integral coefficients and its derivative have been provided. The article refers these data to Schmidt curves.

Keywords: root of polynomial, algebraic numbers, set of Diophantine inequalities, order of approximation, covering of set