УДК 33:51

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Сапун О.Л., к.пед.н, доцент
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет»
Павлидис В.Д., д.п.н., профессор
Чкалова М.В., к.т.н., доцент
ФГБОУ ВПО «Оренбургский государственный аграрный университет», г. Оренбург, Российская Федерация

Ключевые слова: математические понятия, экономическая интерпретация, функциональная зависимость, эластичность функции, производная, дифференциальные уравнения, эластичность полных и средних затрат.
Key words: mathematical concepts, economic interpretation, functional dependency, the elasticity function, derivative, differential equations, elasticity and average total costs.
Аннотация:. В статье рассматриваются возможности различных тем и разделов курса математики по реализации двух уровней экономической интерпретации.
Summary: he article deals with the possibility of different themes and sections of the course of mathematics for the implementation of the two levels of economic interpretation.

Важным средством для реализации этого аспекта экономической направленности является экономическая интерпретация основных математических понятий. При этом математическая интерпретация математических понятий может быть отнесена к первому уровню, который естественно называть иллюстративным.

Как правило, при введении понятий производной и других математических понятий ограничиваются геометрическими и механическими иллюстрациями вводимых понятий, в то время как экономическую интерпретацию можно использовать и при введении понятия матрицы, определении операций над матрицами, введении понятий производной, определенного интеграла, дифференциального уравнения, при использовании функциональных зависимостей и т.д. Второй, более высокий уровень использования экономической интерпретации, заключается в рассмотрении экономического содержания математических утверждений. Можно рассматривать экономический смысл свойства ассоциативности умножения матриц, экономический смысл теоремы о среднем для определенного интеграла, второй теоремы двойственности линейного программирования и др. Этот уровень естественно называть теоретическим, он позволяет студентам одновременно с усвоением математических знании и методов получать и углублять знания по экономике.

Рассмотрим возможности различных тем и разделов курса математики по реализации этих двух уровней экономической интерпретации.

Можно предположить следующие интерпретации функциональных зависимостей. Пример линейной зависимости в экономике - зависимость суммы издержек производства от выпуска продукции. Дробно-линейной зависимостью в экономике является зависимость себестоимости y (т.е. величины затрат на единицу продукции) от объема x этой продукции. Другим примером дробно-линейной функции является зависимость уровня благосостояния y от числа иждивенцев x. Показательная функция в экономике используется там, где величины при сохранении некоторых условий в равные промежутки времени изменяются в равных отношениях. Такое изменение величин характерно для случая, когда достигнутый уровень сам служит базой для дальнейшего роста. Простейшим примером такого рода служит увеличение капитала, пущенного в оборот и через равные промежутки времени (например, в конце каждого года) присоединяющего к себе прибыль. Если p - норма прибыли, а y_0 - начальная величина капитала, то по прошествии года величина капитала составит $y_0(1+p)^x$.

$$У=y_0a^x \qquad (1)$$

где $a=1+p$.

При введении понятия производной можно рассмотреть ряд экономических задач, приводящих к этому понятию. В экономике обычно пользуются средними величинами: средней себестоимостью продукции, средней производительностью труда и т.д. Однако при исследовании развития производства возникает необходимость ответить на вопрос, на какую величину возрастает результат, если увеличить затраты, и наоборот. Средние величины ответа на этот вопрос не дадут. Здесь речь должна идти об изменении переменных величин, и требуется найти предел отношения прироста эффекта и прироста затрат при стремлении последнего к нулю, т.е. прейти к производной.

Переход от средних величин к предельным эффектам можно рассмотреть на задачах по определению роста производительности труда, скорости роста населения, скорости расходования природных ресурсов, определению предельной выручки от продажи товара, предельных издержек производства при выпуске продукции.

Существует множество других примеров, в которых интерпретируется понятие производной, например, скорость ремонта автотранспорта, скорость сбора сельскохозяйственной продукции и т.д. Как видно, в отличие от геометрических и физических приложений производной в сфере экономики имеет место ярко выраженная многозначность трактовки этого понятия. Совершенно ясно, что в процессе обучения математике нет возможности рассмотреть все разнообразие экономических ситуаций и процессов, в которых мы сталкиваемся с различными по содержанию трактовками понятия производной функции. Существенными является то, что студент отчетливо должен понимать следующий факт: если какая-то функция описывает некоторый экономический процесс, то ее первая производная характеризует предельную эффективность этого процесса [2].

В экономике используется понятие эластичности функции, тесно связанное с понятием производной. С помощью производной можно вычислить приращение зависимой переменной, соответствующее приращению независимой переменной. Но при описании динамики экономических процессов удобнее пользоваться не абсолютными приращениями аргумента и функции, а их относительными приращениями, которые являются безразмерными величинами или измеряются в процентах, также во многих задачах экономики удобнее вычислять процент приращения зависимой переменной, соответствующей 1% приращения независимой переменной. И следовательно, понятие эластичной функции (эластичность функции $y=f(x)$ относительно x есть приближенный процентный прирост функции, соответствующий приращению независимой переменной на 1%) дает наиболее полную характеристику экономического процесса [1].

По величине эластичности различают товары эластичного спроса и товары неэластичного спроса (по отношению к изменению цен). При исследовании зависимости спроса от доходов покупателей устанавливают, как спрос на разные товары реагирует на изменение доходов. Например, эластичность некоторых продуктов низких сортов отрицательна (с ростом доходов их покупаю меньше), и наоборот, эластичность предметов роскоши обычно положительна.

В качестве применения понятия эластичности можно рассмотреть эластичных полных и средних затрат [3]. Если предприятие производит *x* единиц какого-либо товара и определена функция полных затрат *к=к(x)*, то эластичность полных затрат составит

$$E_x(k)=\frac{x}{k}\cdot\frac{dk}{dx}=\frac{dk}{dx}\div\frac{k}{x} \qquad (2)$$

Т.е. эластичность полных затрат есть отношение предельных издержек к средним издержкам.

Найдем эластичность средних издержек $p=\frac{k}{x}$ (3)

$$E_x\left(p\right)=\frac{x}{p}\cdot\frac{dp}{dx}=\frac{x}{\frac{k}{x}}\cdot\frac{x\cdot\frac{dk}{dx}-k}{x^2}=\frac{x}{k}\cdot\left(\frac{dk}{dx}-\frac{k}{x}\right)==\frac{x}{k}\cdot\frac{dk}{dx}-1=E_x\left(k\right)-1 \qquad (4)$$

Получим, что эластичность средних издержек на единицу меньше эластичности полных затрат.

$$E_x\left(\pi\right)=E_x\left(\kappa\right)-1 \qquad (5)$$

Если , то эластичность средних затрат равна нулю, а это означает, что средние затраты постоянны. Но из следует, что

$$\frac{x}{k}\cdot\frac{dk}{dx}=1 \qquad (6)$$

Таким образом, если эластичность полных затрат равна 1, то придельные издержки равняются средним издержкам.

Экономической интерпретацией теоремы о среднем могут служить следующие экономические факты. Если переменные издержки производства определяются зависимостью *y=f(x),* где *x* - количество произведенной продукции, то средние издержки производства *p* при объеме производства от x_1 до x_2 составят

$$P=\frac{\int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)dx}{x_2-x_1} \qquad (7)$$

Если зависимость между спросом q на картофель (в сотнях килограммов) и ценой на него p (руб) выражается формулой $q=f(p)$, $a \le p \le b$. То средняя выручка от продажи 100 килограммов картофеля при цене от p_1 до p_2 рублей ($a \le p_1 \le p_2 \le b$) составит

$$u = \frac{\int_{p_1}^{p_2} p \cdot f(p)\,dp}{p_2 - p_1} \qquad (8)$$

Для экономической интерпретации дифференциальных уравнений можно рассмотреть вопрос о текучести рабочей силы. Идея дифференциальных уравнений состоит в том, что, рассматривая бесконечно малые изменения данных непрерывных величин, можно ограничиться их главными частями, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков.

При математическом описании экономических процессов или объектов очень удобно использовать аппарат матриц. Это связана с тем, что матрица представляет собой таблицу, а такая форма записи данных и результатов, во-первых очень наглядна, во-вторых, удобна для введения в ЭВМ и, в-третьих, операции над матрицами хорошо работают при получении экономических результатов**.**

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аникин С. А. Математика для экономистов: учебное пособие / С. А. Аникин, О. И. Никонов, М. А. Медведева; [науч. ред. Х. Н. Астафьев]. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 72 с.
2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. Учебное пособие. Изд-во: Питер, 2005, 464 с.
3. Высшая математика для экономистов. Практикум. Под ред. Н.Ш. Кремера. 2-е изд. М.: Юнити, 2007, 479 с.