УДК 631.363

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРОЦЕССА КОЛЕБАНИЙ ШТАНГИ ПОЛЕВОГО ОПРЫСКИВАТЕЛЯ

Ю.В. Чигарев,
профессор Западнопоморского технологического университета (Респ. Польша), профессор, каф. теоретической механики и теории механизмов и машин БГАТУ, докт. ф.-м. наук, профессор

И.С. Крук,
декан факультета механизации БГАТУ, канд. техн. наук, доцент

В. Романюк,
профессор Технологического природоведческого института в Фалентах (Респ. Польша), докт. техн. наук, профессор

Я. Р. Каминьский,
профессор Варшавского университета естественных наук (Респ. Польша), докт. техн. наук, доцент

А.С. Воробей,
ст. науч. сотр. РУП «НПЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства», канд. техн. наук

Ф.И. Назаров,
аспирант каф. теоретической механики и теории механизмов и машин БГАТУ

Д.Р. Мальцев,
магистрант каф. теоретической механики и теории механизмов и машин БГАТУ

В статье приведен обзор математических моделей, которые могут быть использованы при описании колебательных процессов штанги сельскохозяйственного опрыскивателя, возникающих при его работе.
Ключевые слова: опрыскиватель, штанга, колебания, амплитуда, уравнение.

The article deals with an overview of mathematical models that can be used when describing oscillatory processes agricultural boom sprayer, arising from its work.
Keywords: sprayer boom, vibration amplitude equation.

Введение

Несущая конструкция штанги опрыскивателя связана с корпусом машины таким образом, что деформации ее точек зависят от неровности поля, ветрового потока и равномерности скорости потока жидкости внутри трубопроводов. В зависимости от учета данных условий, колебания штанги могут описываться различными математическими моделями [1-4]. Рассмотрим некоторые из них.

Основная часть

1. Свободные колебания штанги могут возникнуть на ровной поверхности участков поля и при отсутствии других возмущающих факторов.

Рассмотрим поперечные колебания штанги, предполагая, что длина штанги намного больше размеров ее поперечного сечения и движение происходит в одной плоскости, т.е. все точки штанги движутся перпендикулярно оси Ox. Очевидно, что на практике данные колебания будут малыми. Тогда смещения точек $u(x,t)$ и их производные будут столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь. При этом можно считать, что упругие силы сжатия (растяжения) точек и штанги велики. Если в начальный момент штанга занимала горизонтальное положение и находилась в недеформируемом состоянии (положение точек x_1, x_2, рис. 1), то в процессе малых колебаний данный участок штанги деформируется в участок B_1, B_2, длина которого определится из уравнения [5]

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} dx.$$

В силу сделанных предположений о малости колебаний имеем:

$$L \approx x_2 - x_1,$$

т.е. штанга фактически не имеет удлинений.

Теперь перейдем к рассмотрению системы сил, действующих на точки B_1 и B_2. На участок штанги B_1,

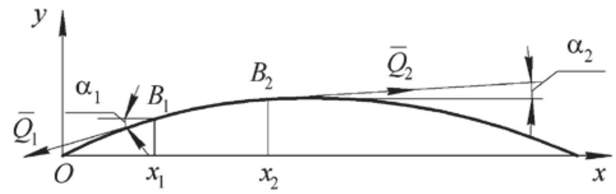

Рисунок 1. Схема растягивающих сил на поверхности штанги

B_2 будут действовать силы упругости $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ в точках B_1 и B_2, а также силы инерции и силы тяжести, которые в случае поперечных колебаний будут направлены параллельно оси y. Тогда уравнение равновесия, записанное на ось Ox, будет

$$Q_1 \cos\alpha_1 - Q_2 \cos\alpha_2 = 0,$$

где α_1 и α_2 – углы между силами Q_1 и Q_2 и поверхностью штанги соответственно.

В силу малости углов имеем:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}} \approx 1;$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}} \approx 1.$$

Следовательно, при малых колебаниях

$$Q_1 \approx Q_2.$$

Заметим, что сила упругости не зависит от выбора x. Поэтому колебания точек B_1 и B_2 будут подчиняться одному закону движения, который приближенно можно описать дифференциальным уравнением [1-4]. В общем случае для точек штанги

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} + cy = 0,$$

где m – масса штанги, кг;
c – жесткость системы, н/м.

Данное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = 0, \tag{1}$$

где k – круговая частота, $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования;
t – время, с.

Если принять, что $C_1 = A\cos\phi_0$, $C_2 = A\sin\phi_0$, то решение уравнения (1) будет

$$y = A\sin(kt + \phi_0), \tag{3}$$

где A – амплитуда колебаний;
ϕ_0 – начальная фаза колебаний.

Скорость в рассматриваемом движении равна

$$v = \dot{y} = Ak\cos(kt + \phi_0). \tag{4}$$

Значения A и ϕ_0 определяются из начальных условий. Если предположить, что при $t = 0$, $y = y_0$, $v = v_0$, то при подстановке их в равенства (3) и (4) получим

$$y_0 = A\sin\phi_0, \tag{5}$$

$$\frac{v_0}{k} = A\cos\phi_0. \tag{6}$$

Проделав несложные преобразования в равенствах (5) и (6), получим выражения для определения амплитуды и фазы колебаний

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \tag{7}$$

$$\mathrm{tg}\phi_0 = \frac{ky_0}{v_0}. \tag{8}$$

Исключая из выражений (3) и (4) время t, получаем на фазовой плоскости уравнение эллипса, которое показывает финитный характер движениия (рис. 2)

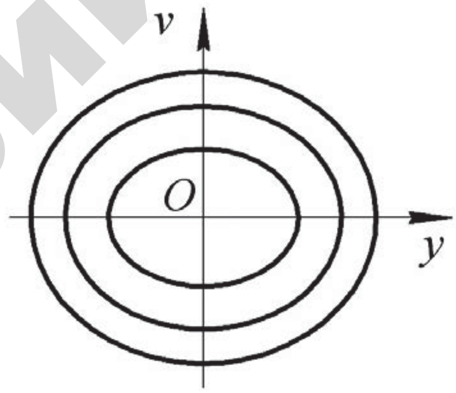

Рисунок 2. Движение точек штанги на фазовой плоскости

$$\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{k\phi_0}\right)^2 = 1. \tag{9}$$

Таким образом, колебательный процесс – амплитуда и фаза, задается начальными условиями: начальным отклонением от положения равновесия и начальной скоростью. Свободные колебания в штанге могут возникнуть, например, при переезде границы неровной поверхности поля с ровной уплотненной поверхностью. В этом случае колебания штанги носят устойчивый характер и исключают при данном движении случаи ее поломки.

2. Если конструкция штанги имеет демпфирующие устройства, тогда при отсутствии возмущающих факторов колебания точек штанги можно описать линейным уравнением [1-4]

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0\,,$$

или

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + ky = 0, \tag{10}$$

где b – параметр демпфирования;

$$2n = \frac{b}{m}. \tag{11}$$

Корни характеристического уравнения (10) равны

$$\delta_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,, \tag{12}$$

согласно которым рассмотрим возможные решения.

Первый случай (малого сопротивления)

$$n < k;\ \ k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}\ ;\ \delta_{1,2} = -n \pm ik_1, \tag{13}$$

где k_1 – круговая частота затухающих колебаний.

Решение имеет вид

$$y(t) = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \phi); \tag{14}$$

$$A = \sqrt{y^2 + \frac{(v_0 + ny_0)^2}{k_1^2}}; \tag{15}$$

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{k_1 y_0}{v_0 + ny_0},$$

где Ae^{-nt} – условная амплитуда затухающих колебаний;

ϕ – фазовый угол.

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1},\ T = \frac{2\pi}{k},\ T_1 > T\,,$$

где T, T_1 – соответственно периоды свободных и затухающих колебаний (рис. 3)

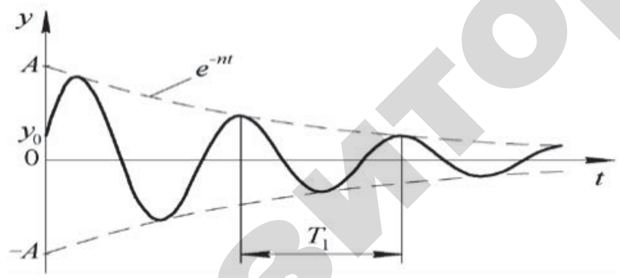

Рисунок 3. Процесс затухания колебаний

Анализ выражения (14) показывает, что движение носит затухающий, колебательный характер. Инфинитное движение точки на фазовой плоскости показано на рис. 4.

Второй случай (большого сопротивления)

$$n > k;\ \ k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}\ ;\ \delta_{1,2} = -n \pm k_2, \tag{16}$$

где k_2 – круговая частота затухающих колебаний.

Тогда решение уравнения (10) будет иметь вид

$$y(t) = e^{-nt}\left(C_3 e^{tk_2} + C_4 e^{tk_2}\right), \tag{17}$$

где C_3 и C_4 – постоянные интегрирования.

Значит, материальная точка совершает затухающее неколебательное движение (рис. 5).

Третий случай (граничный)

$$n = k;\ \ \delta_{1,2} = -n\,. \tag{18}$$

Решение имеет вид

$$y(t) = e^{-nt}\left(C_5 t + C_6\right), \tag{19}$$

где C_5 и C_6 – постоянные интегрирования.

Материальная точка также совершает затухающее неколебательное движение. Поведение кривых y в зависимости от времени t в решениях (17) и (19) зависит от начальных условий [1-4].

Анализ приведенных исследований показывает эффективность демпферующего элемента в гашении колебаний и необходимость его использования в конструкциях опрыскивателей. Напряжения, возникающие в штанге, будут носить релаксационный характер, соответствующий упруговязкой модели Максвелла.

3. В полевых условиях в силу неровности поверхности поля, а также силы ветра и других возмущающих факторов штанга подвергается внешнему воздействию. В этом случае уравнение колебаний при отсутствии демпферующего устройства может иметь вид [1-4]

$$m\ddot{y} + cy = Q\sin pt\,,$$

или

$$\ddot{y} + k^2 y = P_0 \sin pt, \tag{20}$$

где $P_0 = \dfrac{Q}{m}$;

p – частота возмущающей силы.

Решением уравнения (20) будет равенство в виде

$$y = y_1 + y_2\,,$$

где y_1 – общее решение уравнения без правой части, y_2 – частное решение уравнения.

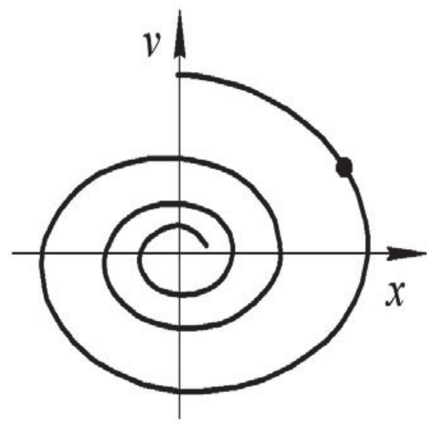

Рисунок 4. Затухающее движение на фазовой

Рисунок 5. Затухающее неколебательное движение

Согласно равенству (3), имеем

$$y_1 = A\sin(kt + \phi_0). \quad (21)$$

Будем искать решение y_2 в виде

$$y_2 = a\sin pt, \quad (22)$$

где a – постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство обратилось в тождество.

Подставляя y_2 и его вторую производную в уравнение (20), имеем:

$$-p^2 a\sin pt + k^2 a\sin pt = P_0 \sin pt. \quad (23)$$

Это равенство будет выполняться при любом t, если $a(k^2 - p^2) = P_0$ или

$$a = \frac{P_0}{k^2 - p^2}. \quad (24)$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$y_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin pt. \quad (25)$$

Так как $y = y_1 + y_2$, то общее решение имеет окончательно вид

$$y = A\sin(kt + \phi_0) + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin pt. \quad (26)$$

Решение показывает, что колебания точки штанги складываются в этом случае из колебаний с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой k, и колебаний с амплитудой a (не зависящей от начальных условий) и частотой p, вынужденных колебаний.

Как видим, амплитуда колебаний зависит от частоты возмущающей силы и частоты собственных колебаний.

Подбирая различные p и k, можно получить вынужденные колебания точек штанги с разными амплитудами. Если величина p близка к k, то амплитуда колебаний становится очень большой. При $p >> k$, амплитуда колебаний становится очень малой (практически близка к нулю).

Наиболее опасным для колебаний штанги является случай, когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний $p = k$ – явление резонанса. Амплитуды вынужденных колебаний при резонансе будут со временем неограниченно возрастать (рис. 6), что может привести к существенной поломке несущей конструкции штанги.

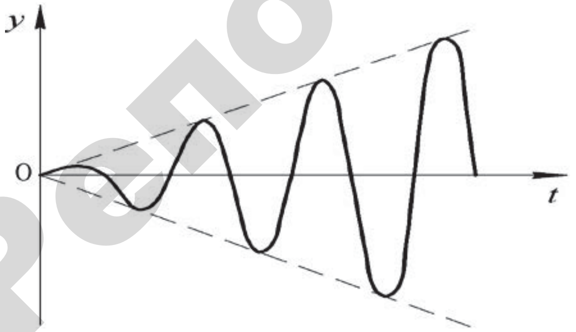

Рисунок 6. Рост амплитуды при резонансе

4. Рассмотрим колебания штанги с учетом неровности поверхности поля, силы ветра и других возмущающих факторов, а также с учетом наличия демпфирующих устройств [1-3].

В качестве суммарной возмущающей силы можно выбрать силу, зависящую от времени в виде

$$Q(t) = Q_0 e^{ipt}, \quad (27)$$

где i –мнимая единиц.

Тогда дифференциальное уравнение колебаний будет

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = Q_0 e^{ipt}. \quad (28)$$

Задавая решение уравнения в виде: $y(t) = y_0 e^{ipt}$ и подставляя его в дифференциальное уравнение, получим алгебраическое уравнение для определения амплитуды вынужденных колебаний, получим

$$-mp^2 y_0 + ipby_0 + cy_0 = Q_0. \quad (29)$$

Разделим его на массу, получим

$$-p^2 y_0 + ip2ny_0 + k^2 y_0 = \frac{Q_0}{m}. \quad (30)$$

Откуда амплитуда вынужденных колебаний

$$A = y_0 = \frac{Q_0}{m(k^2 - p^2 + ip2ny_0)}. \quad (31)$$

Штанга колеблется с амплитудой A и частотой возмущающей силы p. Анализ зависимости модуля амплитуды от частоты возмущающей силы показывает существенное влияние параметра сопротивления n на рост амплитуды: чем он выше, тем меньше амплитуда [1-4].

Выводы

В статье обоснован выбор математических моделей для описания колебательных процессов штанги сельскохозяйственного опрыскивателя при различных его конструкциях и условиях эксплуатации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 272 с.

2. Тарг, С.М. Курс теоретической механики: учеб. для втузов / С.М. Тарг. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.

3. Чигарев, А.В. Курс теоретической механики / А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев. – Мн.: ООО «Новое время», ООО «ЦУПЛ», 2010. – 398 с.

4. Чигарев, А.В. Теоретическая механика. Решение задач: учеб. пос. / А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев, И.С. Крук. – Минск: ИВЦ Минфина, 2016. – 478 с.

5. Кошляков, В.П. Уравнения математической физики / В.П. Кошляков. – М.: Наука. – 576 с.

ПОСТУПИЛА В РЕДАКЦИЮ 11.04.2016