

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВЫМИ МОДЕЛЯМИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ РЕЗИСТИВНЫМИ И ЕМКОСТНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А.И. Шакирин,

доцент каф. прикладной информатики БГАТУ, канд. техн. наук, доцент

*Приведена методика моделирования квазистационарных процессов теплопередачи в изотропных материалах с помощью электротепловых моделей с емкостными и нелинейными резистивными элементами, позволяющая одновременно учесть нелинейную зависимость коэффициента теплопроводности от температуры и инерционность процесса теплопередачи. Предложенная методика позволяет повысить точность моделирования квазистационарных процессов теплопередачи, особенно при использовании современных материалов.*

*The technique of quasi-stationary simulation of heat transfer processes in isotropic materials using electrothermal models with capacitive and non-linear resistive elements that simultaneously account for non-linear dependence of conductivity on temperature and inertial-ness of the heat transfer process. The proposed method can improve the accuracy of the quasi-stationary simulation of heat transfer processes, especially with use of modern materials.*

### Введение

Повышение качества, надежности и долговечности традиционных и вновь создаваемых строительных, конструкционных, тепло- и электроизоляционных материалов требует совершенствования известных и создания новых методов расчета.

При моделировании процессов теплопередачи в изотропных материалах часто применяют метод электротепловой аналогии [1-5], который основан на использовании закона теплопроводности Фурье и применении методов расчета резистивных электрических цепей. Для большинства материалов зависимость коэффициента теплопроводности от температуры достаточно слабая, что позволяет вычислить среднее значение коэффициента теплопроводности в заданном интервале температур и оперировать им как постоянной величиной, что и сделано в работах [2, 4, 5].

Однако для некоторых материалов и веществ зависимость коэффициента теплопроводности от температуры становится принципиальной [3], и поэтому формальное применение метода электротепловой аналогии без учета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры снижает точность моделирования процессов теплопередачи.

На основе метода электротепловой аналогии в работе [1] предложена методика моделирования стационарных процессов теплопередачи в изотропных материалах, которая за счет использования нелинейных резистивных элементов позволяет учесть нелинейный характер зависимости коэффициента тепло-

проводности от температуры. Это позволяет повысить точность моделирования процессов теплопередачи электротепловыми моделями, особенно при использовании современных материалов.

Для моделирования теплоемкости современных многослойных композиционных материалов в электротепловых моделях нестационарных процессов теплопередачи, кроме резистивных элементов, используются и емкостные [2].

Целью настоящей работы является повышение точности моделирования квазистационарных процессов теплопередачи путем применения методики, предложенной в [1], которая позволяет одновременно учесть нелинейные и инерционные свойства электротепловых моделей.

### Основная часть

Диапазон использования электротепловых моделей достаточно широк: от исследования тепловых характеристик полупроводниковых приборов [4] и тепловых режимов элементов и устройств бортовых систем управления космического назначения [5] до проектирования головных обтекателей ракет-носителей [2].

Использование нелинейных резистивных элементов в электротепловых моделях позволяет учесть нелинейный характер зависимости коэффициента теплопроводности от температуры [1], а также моделировать не только граничные условия с конвективным переносом тепла от поверхности, но и такие случаи, когда наряду с конвективной теплоотдачей име-

ют место и другие виды теплообмена, в частности тепловое излучение.

В основе методики, предложенной в работе [1], лежит метод, основанный на представлении связи воздействия  $x$  и отклика на него  $y(t)$  в виде функционального ряда Вольтерра [6, 7]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau)x(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) \cdot x(t-\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 + \dots + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k x(t-\tau_i)d\tau_i + \dots, \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  – соответственно входное воздействие и отклик цепи;

$k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$  – многомерная функция (ядро)  $k$ -го порядка, характеризующая как линейные, так и нелинейные свойства цепи.

Выражение (1) преобразуется по Лапласу в пространстве многих комплексных переменных  $p_i$  –  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ , соответствующих  $\tau_i$  –  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ , и в операторной форме запишется следующим образом:

$$Y(p_1, p_2, \dots, p_k) = \sum_{k=1}^{\infty} K(p_1, p_2, \dots, p_k) \prod_{i=1}^k X(p_i), \quad (2)$$

где  $Y(p_1, p_2, \dots, p_k)$  – изображение отклика;

$K(p_1, p_2, \dots, p_k)$  – изображение ядра  $k$ -го порядка, характеризующего индивидуальные особенности цепи;

$X(p_i)$  – изображение входного воздействия.

Описание электрической цепи с помощью ряда Вольтерра было впервые исследовано Н. Винером [7], поэтому класс цепей этого вида называется классом Вольтерра – Винера.

К достоинствам описания электрических цепей с помощью рядов Вольтерра относятся:

1. Явная связь отклика и воздействия (как во временной, так и в операторной форме), что не характерно для описания свойств цепи с помощью системы дифференциальных уравнений.

2. Одновременный учет как линейных, так и нелинейных свойств цепи.

3. В тех случаях, когда влиянием инерции можно пренебречь (для резистивной цепи), ряд Вольтерра преобразуется в известный степенной ряд, широко используемый для анализа электрических цепей

$$y(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots + k_nx^n + \dots \quad (3)$$

На практике часто используют разновидность разложения (3) в виде ряда Тейлора, для которого  $k_0 = y(x_0)$ ,  $k_1 = y'(x_0) / 1!$ ,  $k_2 = y''(x_0) / 2!$ , ...,  $k_i = y^{(i)}(x_0) / i!$ , где  $x_0$  – точка функции (3), относительно которой осуществляется разложение.

Особенностью ряда Тейлора является единственность способа представления функции, в то время как применение степенных полиномов других видов дает неединственные результаты, а коэффициенты  $k_i$  полинома (3) зависят от способа их определения и области входного воздействия.

4. Удобство использования аппарата рядов Вольтерра при анализе цепей с малой нелинейностью [8]. Это объясняется линеаризацией и алгебраизацией системы нелинейных дифференциальных уравнений цепи при использовании преобразования Лапласа (2), что существенно облегчает моделирование благодаря применению методов анализа линейных цепей.

5. Возможность использования прямого и обратного преобразований Лапласа функций многих переменных:

– прямое преобразование

$$F(p_1, p_2, \dots, p_k) \Leftrightarrow f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k), \quad (4)$$

где

$$F(p_1, p_2, \dots, p_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k e^{-p_i\tau_i} d\tau_i;$$

– обратное преобразование

$$f(\tau) = f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \Leftrightarrow F(p_1, p_2, \dots, p_k), \quad (5)$$

где

$$f(\tau) = \frac{1}{(2\pi j)^k} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(p_1, p_2, \dots, p_k) \prod_{i=1}^k e^{p_i\tau_i} dp_i.$$

В практике расчета электрической цепи широко используется представление как всей цепи в целом, так и ее элементов с помощью формализованных понятий – двухполюсников и многополюсников.

Простейшие нелинейные двухполюсные физические модели представляются тремя цепями: резистивной, емкостной и индуктивной (рис. 1).

Приложенные к этим элементам токи  $i$  и напряжения  $u$  связаны зависимостями:

$$i = f(u) \text{ или } u = f(i) \text{ для резистивной цепи; } (6)$$

$$i = C(u) \frac{du}{dt} \text{ для емкостной цепи; } u = L(i) \frac{di}{dt} \text{ для}$$

индуктивной цепи,

где  $C(u)$  и  $L(i)$  – соответственно дифференциальная емкость и дифференциальная индуктивность, в общем случае, нелинейные.

Для нелинейной электрической цепи, содержащей инерционные элементы, ряд Вольтерра в операторной форме запишется следующим образом [6, 8]:

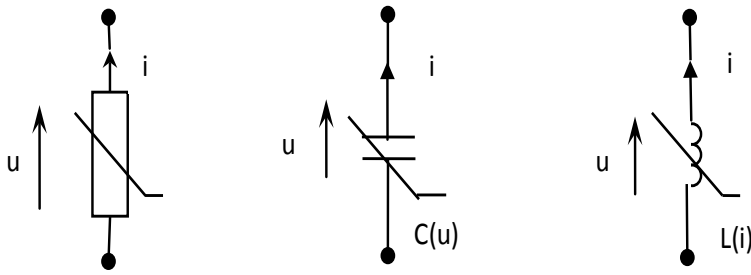


Рисунок 1. Виды нелинейных двухполюсных элементов

$$Y(p_1, p_2, \dots, p_k) = K(p_1)X(p_1) + K(p_1, p_2)X(p_1)X(p_2) + K(p_1, p_2, p_3)X(p_1)X(p_2)X(p_3) + \dots, \quad (7)$$

где  $Y(p_1, p_2, \dots, p_k)$  – изображение отклика;  $K(p_1), K(p_1, p_2), K(p_1, p_2, p_3)$  – изображения передаточной характеристики (ядра);  $X(p_i)$  – изображение входного воздействия.

Методика определения  $K(p_1), K(p_1, p_2)$  и  $K(p_1, p_2, p_3)$  передаточной характеристики (7) электрической цепи следующая [8]:

1. Составляется система уравнений анализируемой цепи, основанная на законах Кирхгофа.
2. Все свободно стоящие в уравнениях напряжения и токи заменяются ядрами соответствующих порядков, т.е.

$u \Rightarrow K_u(p_1)$  или  $K_u(p_1, p_2)$ , или  $K_u(p_1, p_2, p_3)$ ;  $i \Rightarrow K_i(p_1)$ , или  $K_i(p_1, p_2)$ , или  $K_i(p_1, p_2, p_3)$ . При этом исходная система уравнений распадается на три подсистемы относительно искомым членов ряда (7).

3. Входное воздействие  $X(p_i)$  заменяется единицей для линейной подсистемы и нулем для подсистем высших порядков.

4. Компонентные уравнения, связывающие токи и напряжения, приложенные к резистивным (линейным и нелинейным) и емкостным элементам цепи, подставляются из табл. 1.

Величины параметров нелинейных резистивных элементов  $G, G', G''$  находятся по известным вольт-амперным (ампер-вольтовым) характеристикам нелинейных элементов. Если аналитические выражения соответствующих характеристик неизвестны, то параметры можно определить экспериментально путем использования соответствующих устройств, например [9].

5. Подсистемы решаются относительно коэффициентов ряда (7).

Для иллюстрации предложенной методики приведем пример расчета нестационарного процесса теплопередачи, в электротепловой модели которого используется емкостной элемент  $C$ , а для моделирования нелинейной зависимости коэффициента тепло-

**Таблица 1. Компонентные уравнения**

Вид компонента	Уравнение характеристики	Порядок ядра	Компонентное уравнение
Резистивный линейный	$u = f(i)$	1	$K_u(p_1) - RK_i(p_1) = 0$ ;
		2	$K_u(p_1, p_2) - RK_i(p_1, p_2) = 0$ ;
		3	$K_u(p_1, p_2, p_3) - RK_i(p_1, p_2, p_3) = 0$
Емкостной линейный	$i = C \frac{du}{dt}$	1	$K_i(p_1) - p_1 CK_u(p_1) = 0$ ;
		2	$K_i(p_1, p_2) - (p_1 + p_2) CK_u(p_1, p_2) = 0$ ;
		3	$K_i(p_1, p_2, p_3) - (p_1 + p_2 + p_3) CK_u(p_1, p_2, p_3) = 0$
Резистивный нелинейный	$i = f(u) = Gu + G'u^2 + G''u^3$ ; $G = \left. \frac{\partial i}{\partial u} \right _{I_0, U_0}$ ; $G' = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 i}{\partial u^2} \right _{I_0, U_0}$ ; $G'' = \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 i}{\partial u^3} \right _{I_0, U_0}$	1	$K_i(p_1) - GK_u(p_1) = 0$ ;
		2	$K_i(p_1, p_2) - GK_u(p_1, p_2) = f_1$ ; $f_1 = G'K_u(p_1)K_u(p_2)$ ;
		3	$K_i(p_1, p_2, p_3) - GK_u(p_1, p_2, p_3) = f_2$ , $f_2 = G''K_u(p_1)K_u(p_2)K_u(p_3) + 2G'K_u(p_1)K_u(p_2, p_3)$ ;

проводности от температуры  $\lambda = f(T)$  используются нелинейные резистивные элементы  $R_1$  и  $R_2$ , как показано на рис. 2.

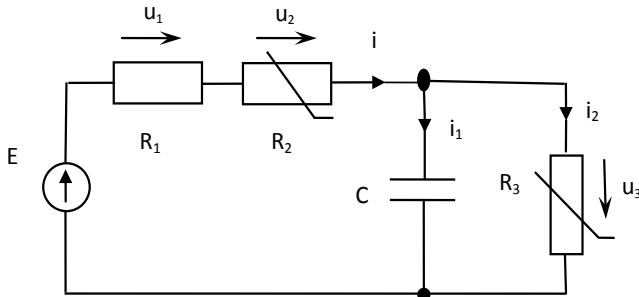


Рисунок 2. Модель теплообмена в виде электрической цепи с линейными резистивным и емкостным элементами и нелинейными резистивными элементами

Система уравнений, составленная по законам Кирхгофа для этой цепи, запишется следующим образом:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = E, \\ u_1 = R_1 i, \\ i = G_2 u_2, \\ i = i_1 + i_2, \\ i_1 = C(u_3) \frac{du_3}{dt}, \\ i_2 = G_3 u_3. \end{cases} \quad (8)$$

Заменим токи  $i$  и напряжения  $u$  соответствующими ядрами. Тогда система (8) распадется на три подсистемы. Подсистема относительно ядер первого порядка  $K_u(p_1)$  и  $K_i(p_1)$  запишется следующим образом:

$$\begin{cases} K_{u_1}(p_1) + K_{u_2}(p_1) + K_{u_3}(p_1) = 1, \\ K_{u_1}(p_1) = R_1 K_{i_1}(p_1), \\ K_i(p_1) = G_2 K_{u_2}(p_1), \\ K_i(p_1) = K_{i_1}(p_1) + K_{i_2}(p_1), \\ K_{i_1}(p_1) = p_1 C K_{u_3}(p_1), \\ K_{i_2}(p_1) = G_3 K_{u_3}(p_1). \end{cases} \quad (9)$$

Решая эту подсистему, получим:

$$K_{u_1}(p_1) = \frac{R_1 G_2 (G_3 + p_1 C)}{G_2 + (1 + R_1 G_2)(G_3 + p_1 C)};$$

$$K_{u_2}(p_1) = \frac{G_3 + p_1 C}{G_2 + (1 + R_1 G_2)(G_3 + p_1 C)};$$

$$K_{u_3}(p_1) = \frac{G_2}{G_2 + (1 + R_1 G_2)(G_3 + p_1 C)}.$$

Остальные неизвестные легко получить из трех последних уравнений подсистемы (9).

Подсистема относительно ядер второго порядка  $K_u(p_1, p_2)$  и  $K_i(p_1, p_2)$  запишется следующим образом:

$$\begin{cases} K_{u_1}(p_1, p_2) + K_{u_2}(p_1, p_2) + K_{u_3}(p_1, p_2) = 0, \\ K_{u_1}(p_1, p_2) = R_1 K_{i_1}(p_1, p_2), \\ K_i(p_1, p_2) - G_2 K_{u_2}(p_1, p_2) = f_1, \\ K_i(p_1, p_2) = K_{i_1}(p_1, p_2) + K_{i_2}(p_1, p_2), \\ K_{i_1}(p_1, p_2) = (p_1 + p_2) C K_{u_3}(p_1, p_2), \\ K_{i_2}(p_1, p_2) - G_3 K_{u_3}(p_1, p_2) = f_2, \end{cases} \quad (10)$$

где  $f_1 = G_2' K_{u_2}(p_1) K_{u_2}(p_2)$ ,  $f_2 = G_3' K_{u_3}(p_1) K_{u_3}(p_2)$ .

Решением этой подсистемы уравнений являются следующие выражения:

$$K_{u_3}(p_1, p_2) = \frac{f_1 - f_2(1 + R_1 G_2)}{G_2 + [(p_1 + p_2)C + G_3](1 + R_1 G_2)},$$

$$K_{u_2}(p_1, p_2) = \frac{f_2 - f_1 + [(p_1 + p_2)C + G_3] K_{u_3}(p_1, p_2)}{G_2}.$$

Искомые ядра  $K_{i_1}(p_1, p_2)$ ,  $K_{i_2}(p_1, p_2)$ ,  $K_i(p_1, p_2)$  и  $K_{u_1}(p_1, p_2)$  получаются из 5-го, 6-го, 4-го и 2-го уравнений подсистемы (10), соответственно.

Подсистема относительно ядер третьего порядка  $K_u(p_1, p_2, p_3)$  и  $K_i(p_1, p_2, p_3)$  запишется следующим образом:

$$\begin{cases} K_{u_1}(p_1, p_2, p_3) + K_{u_2}(p_1, p_2, p_3) + \\ + K_{u_3}(p_1, p_2, p_3) = 0, \\ K_{u_1}(p_1, p_2, p_3) = R_1 K_{i_1}(p_1, p_2, p_3), \\ K_i(p_1, p_2, p_3) - G_2 K_{u_2}(p_1, p_2, p_3) = f_1, \\ K_i(p_1, p_2, p_3) = K_{i_1}(p_1, p_2, p_3) + \\ + K_{i_2}(p_1, p_2, p_3), \\ K_{i_1}(p_1, p_2, p_3) = (p_1 + p_2 + p_3) \cdot \\ \cdot C K_{u_3}(p_1, p_2, p_3), \\ K_{i_2}(p_1, p_2, p_3) - G_3 K_{u_3}(p_1, p_2, p_3) = f_2. \end{cases} \quad (11)$$

где

$$f_1 = G_2'' K_{u_2}(p_1) K_{u_2}(p_2) K_{u_2}(p_3) +$$

$$+ 2G_2' K_{u_2}(p_1) K_{u_2}(p_2, p_3);$$

$$f_2 = G_3'' K_{u_3}(p_1) K_{u_3}(p_2) K_{u_3}(p_3) +$$

$$+ 2G_3' K_{u_3}(p_1) K_{u_3}(p_2, p_3).$$

Решением этой подсистемы уравнений являются следующие выражения:

$$K_{u_3}(p_1, p_2, p_3) =$$

$$= \frac{f_1 - f_2(1 + R_1 G_2)}{G_2 + [(p_1 + p_2 + p_3)C + G_3](1 + R_1 G_2)},$$

$$K_{u_2}(p_1, p_2, p_3) =$$

$$= \frac{f_2 - f_1 + [(p_1 + p_2 + p_3)C + G_3] K_{u_3}(p_1, p_2, p_3)}{G_2}.$$

Искомые ядра  $K_i(p_1, p_2, p_3)$ ,  $K_{i_2}(p_1, p_2, p_3)$ ,  $K_i(p_1, p_2, p_3)$  и  $K_{u_1}(p_1, p_2, p_3)$  получаются из 5-го, 6-го, 4-го и 2-го уравнений подсистемы (11), соответственно.

Обратное многомерное преобразование Лапласа многомерного отклика нелинейной системы приводит к отклику, который является функцией  $n$  переменных  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , но отклик во временной области может быть функцией только одного времени  $t$ . Поэтому после обратного преобразования названные переменные отождествляют (приравнивают), используя метод ассоциации переменных [10], который позволяет, учитывая равенство временных переменных, преобразовать функцию  $n$  переменных  $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$  к функции одной переменной  $K(p)$ , что упрощает переход к временной области, например, с помощью [11].

### Заключение

Предложена методика моделирования квазистационарных процессов теплопередачи в изотропных материалах, которая за счет использования емкостных и нелинейных резистивных элементов в электротепловой модели позволяет одновременно учесть нелинейный характер зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и инерционность процесса теплопередачи. Это позволяет повысить точность моделирования процессов теплопередачи, особенно при использовании современных материалов. Для моделирования процессов теплопередачи, которые представляются сложными электрическими цепями, алгоритмы предложенной методики могут быть реализованы в виде компьютерных программ.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шакирин, А. И. Использование метода электротепловой аналогии для моделирования процессов теплопередачи электрическими цепями с нелинейными резистивными элементами / А.И. Шакирин // Агропанорама, 2014. – № 1. – С. 29-33.
2. Кондратьев, А.В. Проектирование головных обтекателей ракет-носителей из полимерных композиционных материалов при одновременном тепловом и силовом воздействиях / А.В. Кондратьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского. –Х., 2010. – № 4. – С.11–22.
3. Фокин, В. М. Основы технической теплофизики / В. М. Фокин, Г. П. Бойков, Ю. В. Видин. – Москва: Машиностроение, 2004. – 172 с.
4. Ильин, М. В. Метод определения тепловых характеристик силовых полупроводниковых приборов / М.В. Ильин, Н. Н. Беспалов, Ю. М. Голембиовский // Вестник Саратовского гос. технич. университета, 2007, № 2 (24). – Вып. 1. – С. 88 – 94.
5. Белоусов, А. В. Исследование тепловых режимов элементов и устройств бортовых систем управления космического назначения методом электротепловой аналогии: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. технич. наук: 05.13.05: 01.04.14. – Томск, 2004. – 19 с.
6. Пупков, К. А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К. А. Пупков, В. И. Капалин, А. С. Ющенко. – Москва: Наука, 1976. – 448 с.
7. Винер, Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер. – Москва: ИЛ, 1961. – 159 с.
8. Проектирование усилительных устройств (на интегральных микросхемах): учебн. пособ. для радиотехнических специальностей вузов / Б. М. Богданович [и др.]; под ред. Б. М. Богдановича. – Мн.: Выш. школа, 1980. – 208 с., ил.
9. Устройство для измерения передаточных функций Вольтерра нелинейных четырехполосников: а.с. 586403 СССР, МКИ G 01R 29/02 / Б. М. Богданович, В. П. Дорошев, С. С. Позняк, Л. А. Черкас, А. И. Шакирин. – № 2054383/18-21 4; заявл. 16.08.74; опубл. 30.12.77 // Бюл. № 48. – 3 с. : ил.
10. Chen C.F., Chiu R.F. New theorems of association of variables in multiple dimensional Laplace Transform. INT. J. SYSTEM SCI., 1973, vol. 4, no. 4, p. 647 – 664.
11. Гандер, В. Решение задач в научных вычислениях с применением Maple и MATLAB. ISBN: 985-6642-06-X / В. Гандер, И. Гржебичек. – Издательство "Вассамедина", 2005. – 520 с.

ПОСТУПИЛА В РЕДАКЦИЮ 08.09.2015