2. Лещиловский, П.В. Экономика предприятий и отраслей АПК: учебник / П.В. Лещиловский, В.Г. Гусаков, Е.И. Кивейша [и др.]; под ред. П.В. Лешиловского, В.С. Тонковича, А.В. Мозоля. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: БГЭУ, 2007. – 574 с.

Summary

The main factors of intensive development of beef raising in the Republic of Belarus are increasing of livestock yield with simultaneous increasing of livestock and decreasing of unit costs.

УДК 517.926.4

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

Нипарко Н.С., канд. физ.-мат. наук, доцент
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет», г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация

Получено достаточное условие устойчивости показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы с кусочно-непрерывными ограниченными на временной полуоси коэффициентами, матрица Коши которой в соседних точках некоторой монотонно возрастающей к плюс бесконечности последовательности является верхнетреугольной матрицей.

Введение

Рассмотрим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно непрерывными и равномерно ограниченными на временной полуоси $t \geq 0$ коэффициентами и обозначим его через M_n. Отождествляя систему (1) и ее матрицу коэффициентов, будем писать $A \in M_n$.

Задача об устойчивости показателей Ляпунова, возникшая в теории управления показателями Ляпунова такова: пусть про линейную систему $A \in M_2$ известно следующее: ее матрица Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ при некотором $T > 0$ и любом $k \in N$ имеет вид $X_A(kT,(k-1)T) = \begin{pmatrix} a & c_k \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где вещественные постоянные a и b одни и те же для всех $k \in N$, а вещественнозначная последовательность $(c_k)_{k \in N}$ ограничена, т.е. $\sup\limits_{k \in N} | c_k | < +\infty$. Верно ли, что показатели Ляпунова такой системы устойчивы при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов? Положительный ответ на поставленный вопрос дан в заметке [1].

В [1] исходная постановка задачи несколько обобщена: порядок n системы может быть любым натуральным числом, больше единицы, а матрица Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ системы в соседних точках арифметической прогрессии $(kT)_{k \in N}$ хотя и является верхнетреугольной, но не обязательно такой, что ее диагональ одна и та же при всех $k \in N$; при этом выполнено неравенство $\sup\limits_{k \in N} \| X_A(kT,(k-1)T) \| < +\infty$, автоматически вытекающее из требования равномерной ограниченности коэффициентов системы (1).

Основная часть

В данный момент, помимо указанного обобщения мы обобщаем задачу в другом направлении – в частности, выясняем вопрос, насколько существенно в ее постановке требование, чтобы для матрицы Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ указанное выше равенство выполнялось в соседних точках некоторой арифметической прогрессии. Точная постановка задачи следующая.

Пусть $(T_k)_{k \in N}$ – некоторая монотонно возрастающая к бесконечности последовательность положительных чисел, а $(X_k)_{k \in N}$ – последовательность верхнетреугольных постоянных $n \times n$ матриц. Допустим, что система $A \in M_n$ такова, что для ее матрицы Коши

$X_A(\cdot,\cdot)$ при всех $k \in N$ выполнено равенство $X_A(T_{k+1}, T_k) = X_k$. Каким условиям должны удовлетворять последовательности $(T_k)_{k\in N}$ и $(X_k)_{k\in N}$, чтобы показатели Ляпунова любой системы (1) с такой матрицей Коши были устойчивы при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов? Отметим, что последовательность $(X_k)_{k\in N}$ не может быть произвольной – она должна при всех $k \in N$ и некотором положительном a удовлетворять неравенствам

$$\| X_k \| \le \exp\{a(T_{k+1} - T_k)\} \text{ и } \| X_k^{-1} \| \le \exp\{a(T_{k+1} - T_k)\}, \qquad (2)$$

вытекающим из оценки [2] нормы решений системы (1) с равномерно ограниченной на полуоси матрицей коэффициентов.

Для формулировки результатов нам понадобится понятие интегральной вполне резделенности конечного семейства функций. Напомним, что две вещественнозначные кусочно-непрерывные и равномерно ограниченные функции $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$, определенный на полуинтервале $[0,+\infty)$, называются интегрально разделенными [2], если существуют такие положительные постоянные c и d, что при всех $t \ge \tau \ge 0$ верно следующее неравенство $\int_\tau^t (p(s) - q(s)ds > c(t-\tau) - d$ (в этом случае говорят также, что функция $p(\cdot)$ интегрально больше функции $q(\cdot)$). Две вещественнозначные кусочно-непрерывные и равномерно ограниченные функции $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$, определенные на $[0,+\infty)$, называются интегрально близкими [2], если для любого $\varepsilon > 0$ существует зависящая от ε постоянная d_ε, что $|\int_\tau^t (p(s) - q(s)ds| < \varepsilon |t-\tau| + d_\varepsilon$ при всех неотрицательных значениях t и τ. Две функции называются сравнимыми, если они либо интегрально разделены, либо интегрально близки, а семейство $\{a_1(x), \dots, a_n(x)\}$ вещественнозначных функций, определенных на $[0,+\infty)$, называется [2] интегрально вполне разделенным, если любые две его функции сравнимы.

Обозначим для $n \times n$-матрицы $X = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ через $\operatorname{diag} X$ ее диагональ, а через $\operatorname{abs} X$ – совокупность матриц, внедиагональные элементы которых отличаются знаком от одноименных элементов матрицы X; в частности, для любой матрицы $Y \in \operatorname{abs} X$ верно равенство $\operatorname{diag} Y = (|a_{11}|, \ldots, |a_{nn}|)^T$.

Заключение

Теорема. Пусть $(T_k)_{k \in N}$ – монотонно возрастающая к плюс бесконечности последовательность положительных чисел, а $(X_k)_{k \in N}$ – последовательность верхнетреугольных $n \times n$-матриц, удовлетворяющих неравенству (2). Пусть также $\operatorname{diag} X_k = (a_1^k, \ldots, a_n^k),\ k \in N$. Тогда если для любой последовательности $(T_k)_{k \in N}$ справедливо неравенство $\sup\limits_{k \in N}(T_{k+1} - T_k) < +\infty$ и функции $b_i(\cdot) : [0,+\infty) \to R,\ i = 1, \ldots, n$, задаваемые равенством $b_i(t) = \ln |a_i^k|$ при $t \in [T_k, T_{k+1})$, $k \in N$, таковы, что семейство $\{b_1(\cdot), \ldots, b_n(\cdot)\}$ интегрально вполне разделено, то показатели Ляпунова системы $A \in M_n$, для матрицы Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ при всех $k \in N$ выполнены равенства $X_A(T_{k+1}, T_k) = X_k$, устойчивы при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов.

Литература

1. Нипарко, Н.С. Устойчивость показателей Ляпунова в одной задаче об их управлении // Докл. НАН Беларуси. 2010.Т. 54, № 1. С. 39-43.

2. Былов, Б.Ф., Виноград, Р.Э. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.- М.: Наука, 1966. – 576 с.