Вычисление момента инерции прямого цилиндра относительно оси, совпадающей с его диаметром, проходящей через центр масс цилиндра и перпендикулярной его образующей

Болодон В.Н., канд. биол. наук, доцент,
Гончаров В.А., Метельский А.В., студенты
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет»

Найдем момент инерции (*Iy*) однородного прямого цилиндра массой *m*, высотой *h*, с радиусом основания *R* относительно оси, совпадающей с его диаметром, проходящей через его центр масс и перпендикулярной образующей (рис. 1). Разобьем цилиндр (рис. 1) на бесконечно тонкие диски массой *dm*. Найдем момент инерции (*dIy*) такого диска относительно оси *Y*. Для этого выделим на диске элементарную площадку *dS* (рис. 2), которую можно рассматривать как материальную точку. Ее момент инерции относительно оси *Y* определяется выражением $dm' \cdot x^2$, dm' – масса материальной точки, *x*– расстояние от нее до оси *Y*. $dm' = \sigma \cdot dS = \sigma dxdy$, σ– поверхностная плотность выделенного бесконечно тонкого диска. $x = r\cos\varphi$ а $dxdy = rdrd\varphi$, тогда $dI' = \sigma r^3 \cos^2 \varphi drd\varphi$.

Учитывая свойство аддитивности момента инерции, найдем искомый момент инерции диска:

$$\mathrm{dI}_{\mathrm{y}} = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \mathrm{r}^3 \cos^2 \varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

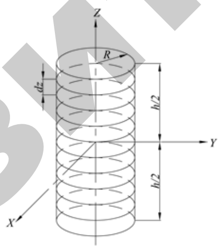

Рис. 1

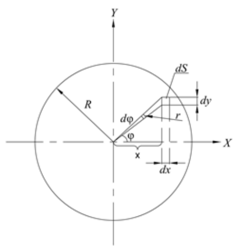

Рис. 2

.Учтем, что $\sigma = \dfrac{dm}{\pi R^2}$ и получим $dI_y = \dfrac{dm \cdot R^2}{4}$. Применяя теорему Штейнера, найдем момент инерции всего цилиндра относительно оси Y:

$$I_y = \int \frac{dmR^2}{4} + \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{m}{h} dz = \left\{ dm = \frac{m}{h} dz \right\} = \frac{mR^2}{4} + \frac{m}{h} \cdot \frac{z^3}{3} \Bigg|_{-h/2}^{h/2} =$$

$$= \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right).$$