саторы среди грибов, актиномицетов, олигонитрофильных бактерий, некоторых видов сине-зеленых водорослей. Сейчас уже ясно, что функция усвоения азота из воздуха довольно широко представлена у микроорганизмов и эту способность микроорганизмов необходимо умело использовать. Например, необходимо заботиться о достаточном количестве органического вещества в почве, которое служит для микроорганизмов источником энергетического материала, при хорошей обеспеченности которым, проявляется в полной мере азотофиксирующая способность. Для интенсивного земледелия, построенного на притоке извне синтетических веществ и энергии, нацеленного на сиюминутную прибыль, микробный блок представляется вредной подсистемой, которую пытаются игнорировать или устранить. Налицо отказ от услуг бактерий, фиксирующих азот воздуха. Все названные причины, которые мы указали выше, привели к тому, что сельскохозяйственная отрасль, базирующаяся на использовании даровой энергии солнца, оказалась в числе ресурсорасточительных и природоопасных.

Агропромышленный комплекс республики является крупным потребителем ресурсов. Ежегодно ему необходимо более 1,1 млн. т. автотракторного топлива, что составляет 35% общереспубликанского расхода. На технологические цели в растениеводстве и животноводстве затрачивается 2,7 млрд. кВт.ч. электроэнергии, 2,6 млн. Гкал. тепловой энергии. Годовая потребность в металле (в виде готовых машин) составляет 350 тыс. тонн. Если все материальные ресурсы, потребляемые на производство продукции растениеводства и животноводства (нефтепродукты, металл, удобрения, химикаты и др.) перевести в условное топливо, то все затраты энергоресурсов на получение 1 центнера зерна составят 28–30 кг.у.т., картофеля — 9–12, говядины — 460–530, свинины — 465–512, молока — 83–93 кг.у.т. на центнер. Эти показатели при их условности, в 2-4 раза превышают уровень ресурсоемкости продукции сельского хозяйства США. Если в 80–90 годах в структуре затрат на производство с/х продукции топливо составляло 7–8% от общих затрат, то в настоящее время эти соотношения изменились — затраты на топливо и амортизационные отчисления на эксплуатацию машин составляют 80%, а затраты труда — 3–5%. Таким образом, национальное сельское хозяйство все еще остается энергоемким, материалоемким с низкой производительностью по сравнению с развитыми странами. Следовательно, успешно развивать сельское хозяйство можно только за счет широкомасштабного освоения ресурсо- и энергосберегающих технологий при переходе на почвозащитное и энергосберегающее земледелие.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА ТИПА ФУКСА НА CP^m

Н.Д. Василевич, *к. ф.-м.н., доцент*
Белорусский государственный аграрный технический университет (г. Минск)

В настоящей работе рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с заданными особыми алгебраическими поверхностями. При помощи систем уравнений этого типа решается ряд задач в теории упругости, в теории движения грунтовых вод и ряд других задач теоретической физики и механики сплошной среды. Данные системы также используются при создании экономических моделей, которые описываются дифференциальными уравнениями.

Уравнение, указанное в заглавии и рассматриваемое в этой статье, — это уравнение вида

$$dY = \left(\sum_{i=1}^{q} A_i \frac{dP_i(x)}{P_i(x)} \right) Y, \tag{1}$$

где Y — неизвестная, а A_i — заданные квадратные комплексные матрицы порядка p, P_i — однородные неприводимые полиномы степени p_i от $x = (x_0, K, x_m)$ и

$$p_1 A_1 + K + p_q A_q = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) является частным случаем линейного уравнения Пфаффа вида: $dy = \omega(x) y$, при

$$M = CP^m \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{q} \overline{P_i} \right), \tag{3}$$

где $\overline{P_i}$ — алгебраическое многообразие коразмерности 1 в CP^m, которое задается формулой $\overline{P_i} = \{x \in CP^m, P_i(x) = 0\}$, а

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} A_i \frac{dP_i}{P_i}, \tag{4}$$

– дифференциальная 1-форма со значениями в квадратных комплексных матрицах порядка n.

Как известно [2, 5, 8], условие полной интегрируемости уравнения (1) имеет вид

$$\omega \wedge \omega \equiv \sum_{i<j} [A_i, A_j] \frac{dP_i \wedge dP_j}{P_i P_j} = 0, \tag{5}$$

где $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$ — коммутатор матриц A_i и A_j. Условие (5) следует из того, что для линейного дифференциального уравнения (1) условие полной интегрируемости имеет вид

$$d\omega = \omega \wedge \omega,$$

а для дифференциальной формы ω, заданной формулой (4)

$$d\omega = \sum_{i=1}^{q} A_i d\left(\frac{dP_i}{P_i} \right) = \sum_{i=1}^{q} A_i d^2 (\ln P_i) = 0$$

в силу свойства оператора дифференцирования $d^2 = 0$.

Ясно, что условие (5) всегда выполняется, если все матрицы A_i, $i \in \overline{1,q}$, попарно коммутируют между собой. В этом случае уравнение (1) легко интегрируется: фундаментальная матрица решений $Y(x)$ уравнения (1) задается формулой

$$Y(x) = \prod_{i=1}^{q} (P_i(x))^{A_i}. \tag{6}$$

Проблема Римана–Гильберта для уравнения (1) (которая называется также проблемой Римана–Гильберта–Левеля) формулируется следующим образом [2, 7]: пусть задан гомоморфизм

$$\psi : \pi_1 \left(x_0, CP^m \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{P_i} \right) \to GL(n, C), \tag{7}$$

существуют ли такие матрицы $A_1, \ldots, A_q$, что гомоморфизм монодромии φ_ω [2] совпадает с гомоморфизмом ψ?

Набор алгебраических поверхностей $\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_q}$ в CP^n (или соответствующих полиномов $P_1, \ldots, P_q$) называется псевдокоммутативным, если существует такое разбиение множества индексов $\overline{1,q} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_k$ на пересекающиеся непустые подмножества, что

1^0 либо мощность $\operatorname{card} Q_\alpha \geq 3$, либо $\operatorname{card} Q_\alpha = 1$, для всякого $\alpha \in \overline{1,k}$;

2^0 если $\operatorname{card} Q_\alpha \geq 3$, то набор полиномов $\{P_i,\ i \in Q_\alpha\}$ образует пучок;

3^0 для любых $\alpha, \beta \in \overline{1,k}$, $\alpha \neq \beta$ и любых $i \in Q_\alpha$, $j \in Q_\beta$, существует такая точка $x_{ij} \in M_i \cap M_j$, в которой пересекаются лишь две поверхности M_i и M_j.

Теорема. Пусть набор поверхностей $\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_q}$, является псевдокоммутативным. Тогда для всякого заданного гомоморфизма (7) существует такое уравнение (1), что его фундаментальная матрица решений, нормированная в точке $x_0 \in CP^n \setminus \{\overline{P_1} \cup \ldots \cup \overline{P_q}\}$ реализует представление (7).

Доказательство теоремы. Для всякого $i \in \overline{1,q}$ через W обозначим матрицу $\chi(\gamma_i)$, где γ_i — образующая группы $\pi_1(x_0, CP^n \setminus (\overline{M}_1 \cup \ldots \cup \overline{M}_q))$, соответствующая положительному обходу вокруг поверхности M_i, а χ — заданный гомоморфизм (7). Для всякого $\alpha \in \overline{1,k}$, выберем произвольный полином R_α, образующий пучок с полиномами P_i, $i \in Q_\alpha$, и положим

$$\omega_\alpha = \sum_{i \in Q_\alpha} A_i \frac{dP_i}{P_i} - B_\alpha \frac{dR_\alpha}{R_\alpha}, \tag{8}$$

где

$$B_\alpha = \sum_{i \in Q_\alpha} A_i. \tag{9}$$

Не теряя общности, считаем, что для любых $\beta, \gamma \in \overline{1,k}$, существует такая точка $x_{\beta\gamma} \in CP^n$, что $R_\alpha(x_{\beta\gamma}) \neq 0$ при $\alpha \neq \beta, \gamma$ (для этого достаточно взять каждый полином, близким к одному из полиномов P_i, $i \in Q_\alpha$). Тогда

$$\sum_{i \in Q_\alpha} A_i - B_\alpha = 0$$

и, следовательно, уравнение

$$dY_\alpha = \omega_\alpha Y_\alpha \tag{10}$$

приводится к однородному уравнению

$$dY_\alpha = \left(\sum_{i \in Q_\alpha} \frac{A_i}{z - a_i} - \frac{B_i}{z - b_\alpha} \right) dz Y_\alpha \tag{11}$$

заменой переменных

$$Z(x) = \frac{F_\alpha(x)}{T_\alpha(x)}, \tag{12}$$

где F_α и T_α — какие-либо полиномы, образующие пучок с полиномами P_i, $i \in Q_\alpha$.

Здесь для всякого $i \in Q_\alpha$:

$$P_i = C_i F_\alpha + d_i T_\alpha;$$
$$R_\alpha = C_\alpha^* F_\alpha + d_\alpha^* T_\alpha;$$

точке $z = a_i \in C$ соответствует при замене (12) поверхность $\overline{P}_i$; точке $z = b_\alpha$ — поверхность $\overline{R}_\alpha = \{x \in CP^n, R(x) = 0\}$.

Согласно [8] существуют такие матрицы A_i, $i \in Q_\alpha$, и B_α, что выполняется (9) и обходу аргумента z фундаментальной матрицы $Y_\alpha(z)$ уравнения (11) нормированной в точке $z(x_0)$, вокруг точки a_i, соответствует матрица монодромии W_i; и, следовательно, обходу вокруг точки b_α — матрица монодромии

$$W_\alpha = \prod_{i \in Q_\alpha} W_i^{-1}. \tag{13}$$

Тогда обходу аргумента x фундаментальной матрицы $Y_\alpha(x) = Y_\alpha(z(x))$ уравнения (10) нормированной в точке x_0, вокруг поверхности $\overline{P}_i$, также соответствует матрица монодромии W_i, а обходу вокруг $\overline{R}_\alpha$ — матрица (13).

Рассмотрим дифференциальное уравнение Пфаффа

$$dY = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha(x) Y. \tag{14}$$

В силу условия $Y_\alpha Y_\beta = Y_\beta Y_\alpha$ для любых $\alpha, \beta \in \overline{1,k}$ и функция Y является фундаментальной матрицей уравнения (10). Из формул (8) следует, что уравнение (10) и его фундаментальная матрица имеют особенности на поверхностях $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_q$ и $\overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_k$.

Поэтому фундаментальная матрица $Y(x)$ уравнения

$$dY = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\omega_\alpha(x) + B_\alpha \frac{dR_\alpha(x)}{R_\alpha(x)} \right) Y \tag{15}$$

имеет заданную монодромию при обходе поверхностей $\overline{P}_i$, $i \in \overline{1,q}$. Так как, кроме того,

$$\omega_\alpha + B_\alpha \frac{dR_\alpha}{R_\alpha} = \sum_{i \in Q_\alpha} A_i \frac{dP_i}{P_i},$$

то уравнение (10) можно записать в виде

$$dY = \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i \in Q_\alpha} A_i \frac{dP_i}{P_i} Y$$

или в виде (1), что и доказывает теорему.

1. Болибрух А.А. Пример неразрешимой проблемы Римана–Гильберта на CP^2. Межвузовский сборник "Геометрические методы в задачах алгебры и анализа". Ярославль, ЯрГУ, 1980, с. 60–64.
2. Голубева В.А. О фуксовых системах дифференциальных уравнений на комплексном проективном пространстве. — Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 9, с. 1570–1580.
3. Василевич Н.Д. Об уравнениях Пфаффа с алгебраическими особенностями. — Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1981, № 5, с. 28–32.
4. Василевич Н.Д. Линейные уравнения Пфаффа. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 3, с. 520–522.
5. Василевич Н.Д., Громак В.И. Интегрируемость комплексных уравнений Пфаффа. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 4, с. 735–737.
6. Василевич Н.Д., Ладис Н.Н. Интегрируемость уравнений Пфаффа на CP^n. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 15, № 4, с. 732–733.
7. Gerard R. Le probleme de Riemann–Hilbert sur une variete analytiqua complexe. — Annales de l'-Institut Fourier, 1969, vol. 19, № 2, p. 1–32.
8. Gerard R., Levelt A.H.M. Etude dune classe particuliere de Systemes de Pfaff du type de Fuchs sur l'espace projectif complexe. — Journal de Mathematiques pures et appliquees,, 1972, vol. 51, № 2, p. 189–217.
9. Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1957. — 456 с.

ТЕНДЕНЦИИ ЗАНЯТОСТИ СЕЛЬСКОГО НАСЕЛЕНИЯ НЕСЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫМИ ВИДАМИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

А.С. Гайдуков, *к.э.н.*

Институт современных знаний (г. Минск)

Модернизация экономики и развитие рыночных отношений приводит к экономии живого труда и сокращению занятости в материальном производстве, увеличению ее в других сферах производства, в частности, в сфере услуг. Так, в странах с развитой рыночной экономикой уменьшается доля занятых в материальном производстве, которая составляет сейчас 20–30% общего числа занятых. Доля занятых в аграрной сфере этих стран не превышает 6% против12% у нас.

Нельзя рассматривать сельскую местность только как производство сельскохозяйственной продукции. На сельских территориях должны получить развитие альтернативные виды деятельности, имеющие рыночную направленность.

Существует две группы факторов, которые оказывают непосредственное влияние на развитие несельскохозяйственных видов занятости:

- факторы спроса;
- факторы нужды и бедности.