Скармливание бычкам йодистого и бромистого калия в отдельном и комплексном сочетании в поваренной солью в составе комбикормов способствует снижению количества аммиака в рубце на 17–25% и мочевины в крови на 12–23% (P<0,05), повышению переваримости питательных веществ кормов на 3-6% (P<0,05), среднесуточных приростов на 7–11% (P<0,05), снижению затрат кормов на 6-10% и себестоимости продукции на 6-8%.

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В НЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

А.П. Рябушко, *д-р физ.-мат. наук, проф.,*
Т.А. Жур, *канд. физ.-мат. наук, доцент*
Белорусский государственный аграрный технический университет (г. Минск)
УДК 521.14

В работе [1] отмечено, что исследования по созданию и уточнению теорий движения в полях тяготения конкретных небесных и искусственных тел (космические аппараты, спутники Земли) имеют важное значение для земной цивилизации и, в частности, для получения достоверной информации, используемой в хозяйственно-экономической деятельности.

В настоящей работе будет решена следующая задача. Имеем материальный шар радиусом R, плотность распределения материи ρ в котором имеет вид

$$\rho = \rho_0 (1 - \frac{r}{R}), \quad 0 \le r \le R, \tag{1}$$

где r – расстояние до центра шара, ρ_0 - плотность материи в центре шара. Вне шара, где $r > R$, ρ=0. В центре шара находится сосредоточенная масса, т.е. тело, масса которого M. Согласно концепции теории тяготения Эйнштейна возникает гравитационное поле, искривляющее пространство-время, и движение пробного тела в нем происходит по геодезической линии (см. [1]). Но если учесть лобовое сопротивление движению пробного тела, то движение будет происходить не по геодезической. Целью настоящей работы будет: 1) получить дифференциальные уравнения (ДУ) движения пробного тела массой m в поле тяготения внутри шара с учетом лобового сопротивления; 2) найти интегралы энергии и площадей; 3) проинтегрировать с помощью этих интегралов ДУ движения; 4) найти закономерности и траекторию движения пробного тела.

Сила лобового сопротивления $\vec{F}$ при движении в газопылевой среде определяется формулой (см. например, [2], стр. 612)

$$\vec{F} = -kv\vec{v}, \tag{2}$$

где $\vec{v}$ - скорость движения пробного тела по орбите, $v = |\vec{v}|$, а коэффициент k для примерно сферически-симметричного пробного тела радиусом r_0 определяется равенством $k = \rho \pi r_0^2 \, г \cdot см^{-1}$.

Опираясь на результаты работы [1], (8) и (2), приходим к ДУ движения пробного тела в поле тяготения внутри шара в ньютоновском приближении с учетом лобового сопротивления:

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\gamma M m}{r^3}x^i - \pi\gamma\rho_0 m(\frac{4}{3} - \frac{r}{R})x^i - kv\frac{dx^i}{dt}, \tag{3}$$

где $x^i(t), i = 1,2,3$ координаты пробного тела (материальной точки) в прямоугольной декартовой системе координат, начало О которой находится в центре шара; t – время; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} см^3 \cdot г^{-1} \cdot сек^{-2}$ - ньютоновская постоянная тяготения; $r^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}$.

Так как распределение материи (1) обладает сферической симметрией, то той же симметрией обладает поле тяготения, и движение пробного тела будет плоским. Без ограничения общности за плоскость движения можно выбрать координатную плоскость x^1Ox^2, уравнение которой $x^3 = 0$. Также имеем $\dot{x}^3 = dx^3/dt = 0$, $\ddot{x}^3 = d^2x^3/dt^2 = 0$ и в системе ДУ

(3) третье уравнение вырождается в тождество. Первое и второе уравнения системы (3) делим на m и записываем в виде:

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} = -\gamma M\frac{x^1}{r^3} - \pi\gamma\rho_0(\frac{4}{3} - \frac{r}{R})x^1 - \frac{k}{m}v\frac{dx^1}{dt} \ , \qquad (4)$$

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} = -\gamma M\frac{x^2}{r^3} - \pi\gamma\rho_0(\frac{4}{3} - \frac{r}{R})x^2 - \frac{k}{m}v\frac{dx^2}{dt} \ . \qquad (5)$$

Умножая (4) на dx^1/dt, (5) на dx^2/dt и складывая найденные уравнения, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2\right] = \gamma M\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\pi\gamma\rho_0}{3}\frac{d}{dt}\left(2r^2 - \frac{r^3}{R}\right) - \frac{k}{m}v\left[\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2\right] . \qquad (6)$$

Учитывая, что $v^2 = (dx^1/dt)^2 + (dx^2/dt)^2$, из (6) находим интеграл энергии:

$$E \equiv \frac{1}{2}v^2 - \frac{\gamma M}{r} + \frac{1}{3}\pi\gamma\rho_0(2r^2 - r^3/R) + \int\frac{k}{m}v^3dt = const \ . \qquad (7)$$

Далее, комбинируем уравнения (4) и (5) следующим образом: из умноженного на x^1 уравнения (5) вычитаем умноженное на x^2 уравнение (4). Тогда получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^2}{dt}x^1 - \frac{dx^1}{dt}x^2\right) = -\frac{k}{m}v\left(\frac{dx^2}{dt}x^1 - \frac{dx^1}{dt}x^2\right). \qquad (8)$$

Введя обозначение $L = x^1(dx^2/dt) - x^2(dx^1/dt)$, решаем уравнение (8) относительно L:

$$L = L_0 e^{-\int\frac{k}{m}vdt} , \qquad (9)$$

где значение не равной нулю постоянной L_0 определится позже. Равенство (9) является интегралом площадей, который определяет удельный по массе орбитальный момент импульса тела при учете лобового сопротивления движению или удвоенную секториальную скорость тела.

Если ввести в плоскости x^1Ox^2 полярную систему координат по формулам $x^1 = r\cos\varphi, x^2 = r\sin\varphi$, не учитывать поля тяготения среды ($\rho_0 = 0$) и лобового сопротивления (k=0), то получаем движение в пустоте в поле тяготения центральной массы M и интегралы энергии и площадей упрощаются:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\gamma M}{r} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\gamma M}{r} = E_0 = -\frac{\gamma M}{2p}(1 - e^2) = const \ , \qquad (10)$$

$$L \equiv r^2\dot{\varphi} = L_0 = \sqrt{\gamma Mp} = const \ . \qquad (11)$$

С их помощью известным способом [3] находится ДУ орбиты тела в пустоте:

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 - \frac{1}{p} = 0 \ , \quad u_0 = \frac{1}{r_0} \ , \qquad (12)$$

решением которого является функция

$$u_0 = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi) \ , \qquad (13)$$

которая определяет эллипс с эксцентриситетом e (0<e<1) и параметром p. Учет влияния поля тяготения среды ($\rho_0 \neq 0$) без лобового сопротивления (k=0) изменяет интеграл энергии (10), но вид интеграла площадей (11) остается прежним. Этот случай подробно исследован в работе авторов [4]. В силу разреженности среды (ρ_0 мало) и небольших эксцентриситетов e исследование в [4] проведено с точностью до членов первого порядка по ρ_0 и второго порядка по e.

В настоящей работе исследование проведем с той же точностью. Тогда (7) и (9) можно записать в виде:

$$E \equiv \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{\gamma M}{r} + \frac{1}{3}\pi\gamma\rho_0(2r^2 - r^3/R) + \int\frac{k}{m}\left[\gamma M\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right)\right]^{3/2} dt = const \quad , \quad (14)$$

$$L \equiv r^2\dot\varphi = L_0\left\{1 - \int\frac{k}{m}\left[\gamma M\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right)\right]^{1/2} dt\right\} \quad . \quad (15)$$

Вычислив интегралы в (14) и (15), и потребовав, чтобы в начальный момент, когда $\varphi = 0$, поступательная орбитальная скорость $v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}$ и секториальная скорость $C = \frac{1}{2}r^2\dot\varphi$ совпадали со скоростями при движении в пустоте ($\rho_0 = 0$, k =0), получим интегралы энергии и площадей в окончательном виде:

$$E \equiv \frac{1}{2}v^2 - \frac{\gamma M}{r} + \frac{1}{3}\pi\gamma\rho_0(2r^2 - r^3/R) + \gamma M\frac{k_0}{m}\left[\left(\varphi + \frac{3}{4}e^2\varphi - \frac{3}{8}e^2\sin 2\varphi\right)\left(1 - \frac{p}{R}\right) + e\sin\varphi\right] =$$

$$= -\frac{\gamma M}{2p}(1-e^2) + \frac{1}{3}\pi\gamma\rho_0 p^2\left[2(1-2e+3e^2) - \frac{p}{R}(1-3e+6e^2)\right] \quad , \quad (16)$$

$$L \equiv r^2\dot\varphi = 2C = \sqrt{\gamma M p}\left[1 - \frac{k_0}{m}p\left(\varphi + \frac{3}{4}e^2\varphi - e\sin\varphi + \frac{1}{8}e^2\sin 2\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k_0}{m}\frac{p^2}{R}\left(\varphi + \frac{7}{4}e^2\varphi - 2e\sin\varphi + \frac{5}{8}e^2\sin 2\varphi\right)\right], \quad (17)$$

где $k_0 = \rho_0\pi r_0^2 \ г\cdot см^{-1}$.

С помощью интегралов (16), (17) по известной схеме (см. [3], [5]) находим ранее неизвестное ДУ орбиты, обобщающее ДУ (12), по которой движется тело в гравитационном поле центральной массы M и среды (1) при учете лобового сопротивления (2) (вводим величину $u = 1/r$):

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{p} = \frac{\pi\rho_0 p^2}{M}\left[\frac{4}{3}(1 - 3e\cos\varphi + 6e^2\cos^2\varphi) - \frac{p}{R}(1 - 4e\cos\varphi + 10e^2\cos^2\varphi)\right] +$$

$$+ \frac{k}{m}\left(2\varphi - \frac{3}{4}e^2\varphi - 2e\sin\varphi + \frac{3}{4}e^2\sin 2\varphi\right) - \frac{k_0}{m}\frac{p}{R}\left(2\varphi + \frac{7}{2}e^2\varphi - 4e\sin\varphi + \frac{9}{4}e^2\sin 2\varphi\right). \quad (18)$$

Решением задачи Коши ДУ (18) при начальных условиях $u(0) = (1+e)/p$, $u'(0) = 0$ является функция:

$$u = \frac{1 + e\cos\varphi}{p} - \frac{2\pi\rho_0 p^2}{M}\left(1 - \frac{p}{R}\right)e\varphi\sin\varphi +$$

$$\frac{\pi\rho_0 p^2}{M}\left\{\left[\frac{4}{3} - \frac{p}{R} + \left(4 - 5\frac{p}{R}\right)e^2\right](1 - \cos\varphi) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{3}\frac{p}{R}\right)e^2(\cos\varphi - \cos 2\varphi)\right\} +$$

$$+ \frac{k_0}{m}\left[2\left(1 - \frac{p}{R}\right)\varphi - \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{2}\frac{p}{R}\right)e^2\varphi + \left(1 - \frac{2p}{R}\right)e(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\frac{p}{R}\right)e^2\sin 2\varphi\right] -$$

$$- \frac{k_0}{m}\left[2\left(1 - \frac{p}{R}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{2}\frac{p}{R}\right)e^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{p}{R}\right)e^2\right]\sin\varphi . \quad (19)$$

Без учета лобового сопротивления уравнение орбиты (19) превращается в уравнение (21) из работы [4], которое подробно обсуждено: траекторией движения тела является вращающийся эллипс с обратным смещением перигелия; на этот эффект наслаивается эффект укорочения (сжатия) орбиты и сопутствующий ему эффект увеличения скорости движения тела по орбите; тело на каждом обороте ($\varphi = 2\pi n, n = \overline{1, N}$) проходит через точку перигелия П ($r = p/(1+e)$; $\varphi = 2\pi n$) для орбиты (13) в пустоте.

При учете лобового сопротивления к перечисленным эффектам добавляется, благодаря членам $2k\varphi / m$ и $ke\varphi \cos\varphi / m$ в (19), эффект слабо пульсирующего уменьшения расстояния r тела до центра (спираль-эффект). Оставшиеся постоянные и чисто периодические члены, пропорциональные k_0, практически не влияют на характер движения тела. Теперь тело не проходит через перигелий на каждом обороте, а приближается к центру за n оборотов на величину

$$\Delta r_n = 2\pi n p^2 \frac{k_0}{m}\left[2 - 3e - \frac{11}{4}e^2 - \frac{p}{R}(2 - 2e - \frac{1}{2}e^2)\right]. \qquad (20)$$

Все это означает, что на фоне указанных эффектов должен прослеживаться спиралеподобный характер движения, который особенно ясно проявился бы в случае кругового движения (*e* = 0). Дадим числовую оценку спираль-эффекту (20). Например, если движется космический аппарат сферической формы радиусом $r_0 = 1\,м$ и массой $m = 1\,т = 10^6\,г$ по круговой траектории на расстоянии $p = 1{,}6 \cdot 10^{13}\,см$ от Солнца (траектория, близкая к орбите Земли), где $\rho \sim 10^{-19} \div 10^{-20}\,г / см^3$, $R = 100p$, то находим значение $\Delta r_n \sim (10 \div 100) n\,км$. Числовые оценки для других упомянутых эффектов можно найти в работе [4]. Отметим также, что согласно интегралу энергии (16) и интегралу площадей (17), поступательная и секториальная скорости тела при учете лобового сопротивления испытывают вековое увеличение и уменьшение соответственно.

Литература

1. Рябушко А.П., Жур Т.А. // Сб. научн. статей 2-ой Международной научн.-практ. конф. «Научно-инновационная деятельность и предпринимательство в АПК: проблемы эффективности и управления», Минск, 17-18 мая 2007 г. Часть 1, Мн., 2007. – С. 95-102.
2. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н. Дубошина.– М. 1976.
3. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности. – Мн., 1979.
4. Рябушко А.П., Жур Т.А. // Весці НАН РБ. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. №2. –С. 86-90.
5. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М., 1963.

ЗАРУБЕЖНЫЙ ОПЫТ ОРГАНИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВЗАИМООТНОШЕНИЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ТОВАРОПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ С ПРЕДПРИЯТИЯМИ АГРОСЕРВИСА ПО РЕМОНТУ И ТЕХНИЧЕСКОМУ ОБСЛУЖИВАНИЮ

А. С. Сайганов, *д-р экон. наук, проф.,*
П.А. Дроздов, *канд. экон. наук,*
Центр аграрной экономики Института экономики НАН Беларуси (г. Минск)

Проблема формирования эффективной системы экономических взаимоотношений предприятий райагросервиса по ремонту и техническому обслуживанию с сельскохозяйственными товаропроизводителями, в условиях низкой оснащенности средствами механизации, является одной из приоритетных. В значительной степени от ее решения в настоящее время зависит восстановление и рост технического потенциала всех субъектов хозяйствования независимо от форм собственности, обеспечение высокой готовности сельскохозяйственной техники, снижение затрат и повышение конкурентоспособности сельскохозяйственной продукции, дальнейший подъем экономики отрасли.

Как показывает практика, эффективность действующей в республике системы фирменного технического сервиса тракторов, комбайнов и сельскохозяйственных машин отечественного производства ограничивается, как правило, гарантийным периодом их эксплуатации.

В то же время технический сервис в послегарантийный период осуществляется предприятиями различного уровня республиканского объединения "Белагросервис". Причем, как показывает практика, объемы работ по оказанию ремонтно-технических услуг сельскохозяйственным потребителям имеют недостаточный уровень. Комплекс работ по текущему