Array Editor: C

File Edit View Web Window Help

Numeric format: shortG Size: 8 by 8

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	7.6	17.5	3.5	14	12.6	12.8	16
2	7.6	0	11	8	15	9	10	13
3	17.5	11	0	3.5	4.7	5	5.4	10
4	3.5	8	3.5	0	8.1	3.5	4	7.5
5	14	15	4.7	8.1	0	8.8	10.5	15
6	12.6	9	5	3.5	8.8	0	0.7	4.5
7	12.8	10	5.4	4	10.5	0.7	0	5.2
8	16	13	10	7.5	15	4.5	5.2	0

Рисунок 1 – **Матрица расстояний между пунктами, км**

В первый маршрут последовательно входят пункты 5, 3, 6, 7, 8, во второй маршрут — пункты 4 и 2. По этим данным выделяем магазины, входящие в первый маршрут, и составляем для них новую матрицу расстояний **А**, для чего удаляем вторые и четвертые строки и столбцы из матрицы **С**. Для матрицы **А** выполняем решение посредством процедуры (3).

Применение процедуры (3) не изменило первый маршрут. Так как размерность матрицы **А** невелика, то выполним точный расчет и получим оптимальный маршрут и программу распределения транспортных средств. Погрешность расчета по процедурам (1), (3) для данного случая составила менее 1%. Маршрут имеет вид: РУСПП → Универсам «Кунцевщина» → «Универсам “Фрунзенский» → Универсам «Могилёвский» → Универсам «Московский» → магазин №19 → РУСПП и составляет 45,3 км.

Так как вторая группа с маршрутом длиной 19,1 км включает в себя только 2 магазина: Универсам «Северный» и Универсам «Юбилейный», то ее маршрут в уточнении не нуждается.

Критерий оптимизации (2) в нашем случае имеет вид:

$$0{,}18 \times \mathbf{TC}(1) + 0{,}17 \times \mathbf{TC}(2) \rightarrow min.$$

Рассчитаем расход топлива на доставку продукции

$$0{,}18 \text{ л / км} \times 45{,}3 \text{ км} + 0{,}17 \text{ л / км} \times 19{,}1 \text{ км} = 11{,}4 \text{ л}.$$

Расчеты с помощью программы на встроенном языке программирования при варьировании величины **Q** показали, что полученное значение расхода топлива удовлетворяет критерию (2).

Изложенная методика была апробирована в районном управлении «Столбцырайгаз» для планирования маршрутов по доставке баллонов газа сельским потребителям Столбцовского района спецавтомобилями на шасси ГАЗ-3307 с двигателями одного типа. В результате апробации методики было установлено, что при ее использовании суммарный пробег автотранспорта снизился примерно на 15%.

Таким образом, информационные технологии *MATLAB* могут быть эффективно использованы для оптимизации маршрутов поставок продукции и услуг в АПК.

НЕКОТОРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА ТИПА ФУКСА

Н. Д. Василевич, *к.ф.-м.н., доцент*

В настоящей работе рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с заданными особыми алгебраическими поверхностями. К решению этих уравнений приводят ряд задач в теории упругости, исследование течения грунтовых вод и другие задачи теоретической физики и механики сплошной среды.

Репозиторий БГАТУ

На открытом множестве *M* рассмотрим уравнение вида:

$$dY = \left(\sum_{i=1}^{q} A_i \frac{dP_i(x)}{P_i(x)} \right) Y, \tag{1}$$

где *Y* — неизвестная, а A_i — заданные квадратные комплексные матрицы порядка *p*, P_i — однородные неприводимые полиномы степени p_i от $x = (x_0, \dots, x_m)$ и

$$p_1 A_1 + \dots p_q A_q = 0. \tag{2}$$

Открытое множество *M* определим следующим образом:

$$m = \mathbb{C}\mathrm{P}^m \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{q} \overline{P}_i \right), \tag{3}$$

где $\overline{P}_i$ — алгебраическое многообразие коразмерности 1 в $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$, которое задается формулой $\overline{P}_i = \left\{ x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^m, P_i(x) = 0 \right\}$.

Пусть

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} A_i \frac{dP_i}{P_i} \tag{4}$$

дифференциальная 1-форма со значениями в квадратных комплексных матрицах порядка *n*.

Как известно [2,3] условие полной интегрируемости уравнения (1) имеет вид

$$\omega \wedge \omega \equiv \sum_{i<j} [A_i, A_j] \frac{dP_i \wedge dP_j}{P_i P_j} = 0, \tag{5}$$

где $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$ — коммутатор матриц A_i и A_j.

Ясно, что условие (5) всегда выполняется, если все матрицы A_i, $i = \overline{1,q}$, попарно коммутируют между собой. В этом случае уравнение (1) легко интегрируется: фундаментальная матрица решений *Y(x)* уравнения (1) задается формулой

$$Y(x) = \prod_{i=1}^{q} \left(P_i(x) \right)^{A_i}. \tag{6}$$

Отметим, что именно в силу условия (2) *Y(x)* зависит лишь от точки $x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^m$, так как

$$Y(\lambda x) = \prod_{i=1}^{q} \left(P_i(\lambda x) \right)^{A_i} = \prod_{i=1}^{q} \left(P_i(x) \right)^{A_i} \lambda^{p_1 A_i} = Y(x) \lambda^{p_1 A_1 + \dots + p_q A_q} = Y(x)$$

для всякого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Во вполне интегрируемом уравнении (1) все матрицы A_i обязаны коммутировать между собой, например, в следующих двух случаях:

а) если для всяких двух индексов $i, j = \overline{1,q}$, $i \neq j$ существует точка, принадлежащая лишь двум поверхностям $\overline{P}_i$ и $\overline{P}_j$ (случай общего положения);

б) если существует такой индекс $i = \overline{1,q}$, что матрица U_i имеет попарно различные собственные числа и для всякого $j = \overline{1,q}$, $j \neq i$, существует точка, принадлежащая лишь двум поверхностям $\overline{P}_i$ и $\overline{P}_j$ (в этом случае всякая матрица A_j коммутирует с A_i и, так как матрица A_i имеет попарно различные собственные числа, то преобразованием подобия с некоторой матрицей *C* она приводится к диагональной форме; поэтому матрицы $C^{-1} A_j C$, коммутирующие с диагональной матрицей $C^{-1} A_i C$, имеющей попарно различные собственные числа, обязаны быть диагональными и, следовательно, коммутировать между собой).

В [2] показано, как из коммутационных соотношений в фундаментальной группе

Репозиторий БГАТУ

$$\pi_1\left(x_0, \mathbb{C}\mathrm{P}^m \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{P}_i\right),$$

где x_0 – фиксированная точка из $\mathbb{C}\mathrm{P}^m \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{P}_i$, выводятся коммутационные соотношения между матрицами A_i во вполне интегрируемом уравнении (1). Один из основных наших результатов состоит в получении необходимых и достаточных условий полной интегрируемости уравнения (1), выраженных в терминах коммутационных соотношений между матрицами A_j при данном взаимном расположении многообразий $\overline{P}_i$, $i = \overline{1,q}$.

Проблема Римана-Гильберта для уравнения (1), которая называется также проблемой Римана-Гильберта-Левеля, формулируется следующим образом [2,4]: пусть задан гомоморфизм

$$\psi : \pi_1(x_0, \mathbb{C}\mathrm{P}^m \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{P}_i) \to GL(n;\mathbb{C}), \tag{7}$$

существуют ли такие матрицы $A_1, \dots A_q$, что гомоморфизм монодромии φ_ω совпадает с гомоморфизмом ψ?

Эта проблема легко решается в том частном случае, когда группа монодромии

$$\varphi_\omega\left(\pi_1(x_0, \mathbb{C}\mathrm{P}^m \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{P}_i)\right)$$

абелева.

Действительно, если $B_1, \dots B_q \in GL(n;\mathbb{C})$ – образующие группы монодромии, соответствующие элементарным обходам вокруг поверхностей $\overline{P}_i$, то достаточно положить $A_i = \frac{1}{2\pi i}\ln B_i$, и тогда в соответствии с (6) при гомоморфизме φ_ω элементарному обходу вокруг многообразия $\overline{P}_i$ соответствует матрица

$$\exp 2\pi i = \exp \ln B_i = B_i,$$

откуда и следует, что $\varphi_\omega = \psi$.

Здесь предполагается, что у матриц B_j существуют такие значения логарифмов $\ln B_i$, для которых выполняется условие

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{q} p_i \ln B_i = 0. \tag{8}$$

Заметим, что из условия (8) следует справедливость условия А. А. Болибруха [1]

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{q} p_i \ln \beta_i^j \equiv 0 \pmod d, \quad j = 1, \dots s, \tag{9}$$

где β_i^j — собственные числа матриц β_i^j,

$$B_i = diag\left(B_i^1, \dots, B_i^s\right), \quad \text{d= НОД } \left(p_1, \dots, p_n\right).$$

Условие (9), как показано в [1], является необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы Римана-Гильберта-Левеля в коммутативном случае.

Рассмотрим необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнения (1) при m=2.

Репозиторий БГАТУ

Пусть α — произвольная точка алгебраической кривой $\overline{P}_i$, а (ξ,η) – такие афинные координаты с началом в точке α в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, что кривая $\overline{P}_i$ касается в точке α оси $\eta = 0$.

По теореме о неявной функции кривая $\overline{P}_i$ в малой окрестности V точки α задается уравнением $\eta = f(\xi)$, где *f* — сходящийся степенной ряд без свободного и линейного членов. В алгебраической терминологии $(\xi, f(\xi))$ водимая параметризация кривой $\overline{P}_i$ в точке α.

Для всякого полинома P_j

$$P_i(\xi, f(\xi)) = a_{ij}(\alpha)\xi^{K_{ij}(\alpha)} + 0\left(|\xi|^{K_{ij}(\alpha)}\right), \tag{10}$$

а $K_{ij}(\alpha)$ — целое неотрицательное число, называемое порядком нуля полинома P_j на кривой $\overline{P}_i$ в точке α [5,стр. 126]. В [5] показана инвариантность $K_{ij}(\alpha)$ при переходе к другой системе координат (ξ_1,η_1).

Геометрический смысл $K_{ij}(\alpha)$ состоит в том, что $K_{ij}(\alpha)$ характеризует порядок касания кривых $\overline{P}_i$ и $\overline{P}_j$ в точке α (таким образом, очевидно, $K_{ij}(\alpha) = K_{ji}(\alpha)$). Более точно: $K_{ij}(\alpha) = 0$, если $\overline{P}_i$ и $\overline{P}_j$ не пересекаются в точке α; $K_{ij}(\alpha) = 1$, $\overline{P}_i$ и $\overline{P}_j$ пересекаются в точке α трансверсально; $K_{ij}(\alpha) = 2$, если $\overline{P}_i$ и $\overline{P}_j$ имеют простое касание в точке α (такое касание имеют прямая $y = 0$ и парабола $y = bx^2$ в начале координат); и т.д.

Если теперь для всякого $i = \overline{1,q}$, положить

$$R_i = \left\{\alpha \in \overline{P}_i,\ \exists\, j \in \overline{1,q},\ j \neq i,\ K_{ij}(\alpha) > 0\right\}$$

(таким образом, R_i — это конечное множество точек из $\overline{P}_i$, через которые проходит еще хотя бы одна кривая $\overline{P}_j$), то в этих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема. Условие (5) равносильно выполнению условий

$$\left[A_i, \sum_{j\neq i} K_{ij}(\alpha) A_j\right] = 0 \tag{11}$$

для всякого $i = \overline{1,q}$ и всякой точки $\alpha \in K_i$.

Доказательство импликации (5) $\Rightarrow$ (11). Пусть выполняется условие (5). Если умножить обе части (5) на $P = P_1 \cdot \ldots \cdot P_q$, то получим

$$dP_i \wedge \omega_i + P_i \sigma_i = 0, \tag{12}$$

где

$$\omega_i = PP^{-1} \sum_{j\neq i} [A_i, A_j] \frac{dP_j}{P_j}, \tag{13}$$

и

$$\sigma_i = PP^{-1} \sum_{\substack{k<j \\ k,j\neq i}} [A_k, A_j] \frac{dP_k \wedge dP_j}{P_k P_j}, \tag{14}$$

являются дифференциальными 1- и 2-формами соответственно с полиноминальными коэффициентами. Так как $dP_i(x) \neq 0$ при всех $x \in \overline{P}_i$ (полиномы $\overline{P}_i$ не особые), то из (12) следует, что для всякой точки $x \in \overline{P}_i$

$$dP_i(x) \wedge \omega_i(x) = 0. \tag{15}$$

Пусть теперь $\alpha \in R_i$, *V* – малая окрестность точки α, (ξ,η) — такие афинные координаты с началом в точке α, что прямая η=0 касается кривой $\overline{P}_i$ в точке α, $(\xi, f(\xi))$ —

Репозиторий БГАТУ

неприводимая параметризация кривой $\overline{P}_i$ в окрестности V. Тогда в силу (10) в окрестности V выполняется равенство

$$d\,P_i(\xi,\eta)\wedge dP_j(\xi,\eta)\Big|_{\eta=f(\xi)}=\left(b_i(\alpha)a_{ij}(\alpha)K_{ij}(\alpha)\xi^{K_{ij}(\alpha)-1}+0\left(|\xi|^{K_{ij}(\alpha)-1}\right)\right)d\xi\wedge d\eta \qquad (16)$$

и, следовательно,

$$d\,P_i(\xi,\eta)\wedge\omega_i(\xi,\eta)\Big|_{\eta=f(\xi)}=dP_i(\xi,\eta)\wedge\sum_{j\neq i}[A_i,A_j]\prod_{l\neq i}P_l(\xi,\eta)\frac{dP_i(\xi,\eta)}{P_j(\xi,\eta)}\Bigg|_{\eta=f(\xi)}=$$

$$=b_i(\alpha)\prod_{l\neq i}a_{il}(\alpha)\sum_{j\neq i}K_{ij}(\alpha)[A_i,A_j]\,\xi^{\sum_{j\neq i}K_{ij}(\alpha)-1}+0\left(|\xi|^{\sum_{j\neq i}K_{ij}(\alpha)-1}\right)d\xi\wedge d\eta,$$

где $b_i(\alpha)\dfrac{\partial P_i(\xi,\eta)}{\partial\eta}\Bigg|_{\xi=\eta=0}\neq 0$ и $a_{il}(\alpha)\neq 0$.

Поэтому из (5) следует, что коэффициент при $\xi^{\sum_{j\neq i}K_{ij}(\alpha)-1}$ в (16) равен 0. Отсюда и из $b_i(\alpha)$, $a_{il}(\alpha)\neq 0$ следует

$$\sum_{j\neq i}K_{ij}(\alpha)[A_i,A_j]=0,$$

то есть условие (11), что требовалось доказать.

Доказательство импликации (11) $\Rightarrow$ (5). Так как коэффициенты дифференциальной 1-формы ω_i — полиномы степени $p-p_i-1$, где $p=p_1+\ldots+p_q$ и $p_i=\deg P_i$, то либо она имеет не более $p_i\left(p-p_i-1\right)$ нулей на $\overline{P}_i$, либо выполняется (15). Поэтому, если выполняются условия (11), то во всякой точке $\alpha\in R_i$ форма ω_i имеет нуль по крайней мере порядка $\sum_{j\neq i}K_{ij}(\alpha)$. Отсюда вытекает, что форма ω_i имеет на $\overline{P}_i$ по крайней мере

$\sum_{\alpha\in R_i}\sum_{j\neq i}K_{ij}(\alpha)=\left(p-p_i\right)p_i$ нулей, считая с их кратностями и, следовательно, выполняется (15).

Далее, так как $P\omega\wedge\omega=dP_i\wedge\omega_i+P_i\sigma_i$, то из (15) следует, что $P\omega\wedge\omega=0$ на $\overline{P}_i$. Таким образом, дифференциальная 2-форма с полиномиальными коэффициентами степени p–2 обращается в нуль на $\overline{P}_1\cup\ldots\cup\overline{P}_q$, т.е. на алгебраической кривой степени p. Отсюда следует, что $P\omega\wedge\omega=0$ и, следовательно, $\omega\wedge\omega=0$. Теорема доказана.

1. Болибрух А.А. Пример неразрешимой проблемы Римана-Гильберта на CP^2. – Межвузовский сборник "Геометрические методы в задачах алгебры и анализа". Ярославль, ЯрГУ, 1980, с.60–64.

2. Голубева В. А. О фуксовых системах дифференциальных уравнений на комплексном проективном пространстве. – Дифференц.уравнения, 1977, т.13, №9, с.1570–1580.

3. Gérard R. Le problème de Riemann-Hilbert sur une variété analytique complexe. – Annales de l'Institut Fourier, 1969, vol.19, №2, p. 1–32.

4. Gérard R., Levelt A.H.M. Etude dune classe particulière de Systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur l'espace projectif complexe. – Journal de Mathematiques pures et appliquees, 1972, vol.51, №2, p. 189–217.

5. Уокер Р. Алгебраические кривые. – М.:Изд.иностр.лит., 1952. – 236 с.

Репозиторий БГАТУ